

SILVIA VILARIÑO FERNÁNDEZ

**NUEVAS APORTACIONES  
AL ESTUDIO DE LOS FORMALISMOS  
K-SIMPLÉCTICO Y K-COSIMPLÉCTICO**

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Departamento de Geometría y Topología





**NUEVAS APORTACIONES  
AL ESTUDIO DE LOS FORMALISMOS  
K-SIMPLÉCTICO Y K-COSIMPLÉCTICO**

**SILVIA VILARIÑO FERNÁNDEZ**

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas, bajo la dirección del Profesor Dr. Modesto R. Salgado Seco, para obtener el Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela.

Se llevó a cabo su defensa el día 23 de Enero de 2009 en la Facultad de Matemáticas de dicha universidad, obteniendo la cualificación de Sobresaliente cum laude.



*A mi familia*



# Agradecimientos

Quisiera expresar en estas líneas mi agradecimiento a todos aquellos que han estado a mi lado en la realización de esta tesis doctoral.

En primer lugar, me gustaría dar las gracias al Prof. Modesto R. Salgado Seco, director de esta Tesis, por toda la energía y tiempo dedicados a la realización de este trabajo. Él fue quien me introdujo en los temas aquí tratados, resolviendo muchas de las dudas que surgieron en su desarrollo y el que más activamente participó en la obtención de los resultados de esta Tesis. Su inestimable ayuda y apoyo han sido imprescindibles para la realización de la misma.

Quisiera extender este agradecimiento a los profesores Manuel de León, David Martín de Diego, Miguel C. Muñoz-Lecanda por su colaboración en algunos capítulos de esta Memoria.

Quisiera también agradecer la importante y valiosa colaboración del Prof. Narciso Román-Roy durante la realización de esta Memoria.

A los miembros de la Red de “Geometría, Mecánica y Control” por el buen ambiente que he disfrutado en todos los encuentros.

También me gustaría destacar el excelente ambiente de trabajo y actitud cooperativa prestada por el Departamento de Xeometría e Topoloxía de la Universidad de Santiago de Compostela. En especial al profesor J. A. Oubiña por su ayuda en diversas cuestiones que han ido surgiendo a lo largo de este trabajo.

No me quiero olvidar de todas las personas que estuvieron conmigo durante estos años y que participaron directa o indirectamente en este trabajo y en la convivencia diaria. Entre ellos quiero destacar a María y a Carlos por ser los que más sufrieron las alegrías, esfuerzos y frustraciones durante estos años.

Finalmente quisiera agradecer también a mi familia, en especial a mis padres y mi hermana, por su comprensión y apoyo incondicional a lo largo de este camino.





# Índice general

Agradecimientos	VII
Introducción	xv
<b>I Teoría k-simpléctica</b>	<b>1</b>
<b>1. Formulación k-simpléctica de las Teorías Clásicas de Campos</b>	<b>3</b>
1.1. El enfoque hamiltoniano. . . . .	3
1.1.1. Fundamentos geométricos. . . . .	3
1.1.2. Campos de $k$ -vectores y secciones integrales. . . . .	11
1.1.3. Formalismo hamiltoniano. Ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl. . . . .	13
1.2. El enfoque lagrangiano. . . . .	21
1.2.1. Elementos geométricos. . . . .	22
1.2.2. Levantamiento de aplicaciones y campos de vectores. . . . .	28
1.2.3. Campos de $k$ -vectores y SOPDE's en $T_k^1Q$ . . . . .	29
1.2.4. Formalismo lagrangiano. Ecuaciones de Euler - Lagrange. . . . .	32
1.3. Equivalencia entre las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana. . . . .	40
<b>2. Simetrías y Leyes de conservación</b>	<b>43</b>

2.1. Caso hamiltoniano. . . . .	43
2.1.1. Simetrías y leyes de conservación. . . . .	44
2.1.2. Simetrías de Cartan y Teorema de Noether. . . . .	49
2.2. Caso lagrangiano. . . . .	53
2.2.1. Simetrías y leyes de conservación . . . . .	53
2.2.2. Simetrías de Cartan y Teorema de Noether. . . . .	58
2.2.3. lagrangianos equivalentes. . . . .	65
2.2.4. Simetrías lagrangianas gauge . . . . .	71
2.3. Tabla de simetrías y leyes de conservación . . . . .	74
<b>3. Teoría de Campos con ligaduras no-holonómicas. Enfoque <math>k</math>-simpléctico.</b>	<b>77</b>
3.1. Formulación lagrangiana no-holonómica. . . . .	77
3.1.1. La subvariedad de ligaduras. . . . .	78
3.1.2. El fibrado de las formas de ligadura. . . . .	79
3.1.3. La distribución de ligaduras. . . . .	80
3.1.4. Las ecuaciones de campo no-holonómicas . . . . .	81
3.2. El proyector no-holonómico. . . . .	86
3.3. La ecuación momento no-holonómica . . . . .	90
3.4. Ejemplo y casos particulares. . . . .	96
3.4.1. “Cosserat rods”(Barra Cosserat). . . . .	96
3.4.2. Ligaduras holonómicas. . . . .	100
3.4.3. Ligaduras lineales. . . . .	101
3.4.4. Ligaduras definidas por conexiones . . . . .	106
3.5. Teoría hamiltoniana $k$ -simpléctica no-holonómica . . . . .	109
<b>4. Relación entre conexiones no lineales en <math>T_k^1Q</math> y SOPDE’s</b>	<b>113</b>

4.1.	La sucesión exacta corta construida a partir de $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$ .	113
4.1.1.	El fibrado vectorial $(T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q, (\tau_Q^k)^* \tau_Q^k, T_k^1 Q)$ .	114
4.1.2.	La aplicación $\mathbf{i} : T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \longrightarrow V(T_k^1 Q) \subset T(T_k^1 Q)$ .	116
4.1.3.	El fibrado vectorial $(T_k^1 Q \times_Q TQ, (\tau_Q^k)^* \tau_Q, T_k^1 Q)$ .	118
4.1.4.	La aplicación $\mathbf{j} : T(T_k^1 Q) \longrightarrow T_k^1 Q \times_Q TQ$	119
4.1.5.	La sucesión exacta corta construida a partir de $\tau_Q^k$ .	120
4.2.	Conexiones no lineales en el fibrado vectorial $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$ .	121
4.2.1.	La aplicación horizontal $\mathcal{H} : T_k^1 Q \times_Q TQ \longrightarrow T(T_k^1 Q)$ .	122
4.2.2.	La aplicación $\mathcal{V} : T(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q$ .	124
4.2.3.	El proyector horizontal $\mathbf{h}$ y el proyector vertical $\mathbf{v}$ .	126
4.2.4.	Conexiones no lineales y estructura $k$ -tangente en $T_k^1 Q$ .	127
4.3.	Relación entre SOPDE's y conexiones no lineales.	130
4.4.	Linealización de campos de vectores de segundo orden.	135
4.4.1.	Linealización de SOPDE's.	135
4.4.2.	Ejemplo: la ecuación de conducción del calor	137
4.5.	Conexiones en $T_k^1 Q$ inducidas por una conexión lineal en $Q$ .	139

## 5. Formulación $k$ -simpléctica en algebroides de Lie 143

5.1.	Preliminares sobre algebroides de Lie.	144
5.1.1.	Definición de algebroides de Lie.	144
5.1.2.	Ejemplos.	146
5.1.3.	Diferencial exterior.	147
5.1.4.	Morfismos de algebroides de Lie.	150
5.2.	La prolongación de un algebroides de Lie mediante una fibración.	151
5.3.	Formalismo lagrangiano $k$ -simpléctico en algebroides de Lie.	158
5.3.1.	Elementos geométricos.	159

5.3.2.	Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden. . . . .	167
5.3.3.	Formalismo lagrangiano. . . . .	176
5.3.4.	Ejemplos. . . . .	193
5.4.	Formalismo hamiltoniano. . . . .	198
5.4.1.	Elementos geométricos. . . . .	198
5.4.2.	Formalismo hamiltoniano. . . . .	207
5.5.	Equivalencia entre el formalismo lagrangiano y el hamiltoniano. . . .	212

## **II Teoría $k$ -cosimpléctica 221**

### **6. Formulación $k$ -cosimpléctica de las Teorías Clásicas de Campos 223**

6.1.	El enfoque hamiltoniano. . . . .	223
6.1.1.	Fundamentos geométricos. . . . .	224
6.1.2.	Formalismo hamiltoniano. Ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl. . . . .	228
6.2.	El enfoque lagrangiano. . . . .	240
6.2.1.	Elementos geométricos. . . . .	240
6.2.2.	Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden. . . . .	246
6.2.3.	Formalismo lagrangiano: ecuaciones de Euler - Lagrange. . . .	251
6.3.	Equivalencia entre la formulación lagrangiana y hamiltoniana . . . .	263

### **7. Formalismo $k$ -cosimpléctico y conexiones no lineales en $\mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ . 265**

7.1.	Conexiones y energía lagrangiana. . . . .	266
7.1.1.	Conexiones en $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ . . . . .	266
7.1.2.	La función energía lagrangiana. . . . .	277
7.2.	Formalismo hamiltoniano $k$ -cosimpléctico con conexiones llanas. . . .	280

7.2.1.	Estructura $k$ -cosimpléctica. . . . .	281
7.2.2.	Formalismo hamiltoniano. . . . .	284
7.3.	Formalismo lagrangiano $k$ -cosimpléctico con conexiones llanas. . . . .	288
7.3.1.	Estructura $k$ -cosimpléctica. . . . .	289
7.3.2.	Formalismo lagrangiano con conexiones llanas. . . . .	293
7.4.	Equivalencia entre los principios variacionales: caracterización de la energía. . . . .	296
7.4.1.	Elementos geométricos. . . . .	296
7.4.2.	Caracterización de la energía. . . . .	299
7.4.3.	Equivalencia entre los principios variacionales. . . . .	301
<b>8.</b>	<b>Formalismo <math>k</math>-cosimpléctico en algebroides de Lie.</b>	<b>307</b>
8.1.	Formalismo lagrangiano $k$ -cosimpléctico en algebroides de Lie. . . . .	307
8.1.1.	Elementos geométricos. . . . .	308
8.1.2.	Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden. . . . .	317
8.1.3.	Formalismo lagrangiano. . . . .	320
8.2.	Formalismo hamiltoniano . . . . .	334
8.2.1.	Elementos geométricos. . . . .	334
8.2.2.	Formalismo hamiltoniano. . . . .	342
8.3.	Equivalencia entre el formalismo lagrangiano y el hamiltoniano. . . . .	348
<b>A.</b>	<b>Simetrías y leyes de conservación</b>	<b>353</b>
<b>B.</b>	<b>Espacios vectoriales <math>k</math>-simplécticos</b>	<b>367</b>
<b>C.</b>	<b>Índice de símbolos</b>	<b>371</b>
	<b>Conclusiones.</b>	<b>377</b>



# Introducción

El formalismo  $k$ -simplético (polisimplético estándar de Günther) es la generalización a las teorías clásicas de campos del formalismo simplético estándar de la Mecánica. En este sentido el formalismo  $k$ -simplético es usado para dar una descripción geométrica de ciertos tipos de teorías de campos: en una descripción local, aquellas teorías cuyos lagrangianos y hamiltonianos no dependen de las coordenadas en la base, denotadas por  $(t^1, \dots, t^k)$  (en muchas ocasiones, las coordenadas espacio-tiempo); esto es, el formalismo  $k$ -simplético es sólo válido para lagrangianos  $L(q^i, v_A^i)$  y hamiltonianos  $H(q^i, p_i^A)$  que dependen de las coordenadas del campo  $q^i$  y de las derivadas parciales del campo  $v_A^i$ , o los correspondientes momentos  $p_i^A$ .

El formalismo  $k$ -cosimplético es la generalización a las teorías de campos del formalismo cosimplético estándar de la Mecánica no autónoma, véase [83, 84]. Este formalismo permite describir las teorías de campos que involucran las coordenadas de la base en los lagrangianos y hamiltonianos. El fundamento del formalismo  $k$ -cosimplético son las variedades  $k$ -cosimpléticas introducidas por M. de León *et al.* [83, 84].

Una de las ventajas de los formalismos  $k$ -simplético y  $k$ -cosimplético es que para su desarrollo sólo es necesario utilizar el fibrado tangente y el fibrado cotangente de una variedad.

Existen otras alternativas para describir las ecuaciones de campo desde el punto de vista geométrico. Así por ejemplo podemos citar el formalismo multisimplético, desarrollado por la escuela de Tulczyjew en Warsaw, (véase [60, 61, 62, 128]), e independientemente por García y Pérez-Rendón [40, 41] y Goldschmidt y Sternberg [45]. Este enfoque fue revisado por Martin [94, 95] y Gotay *et al.* [46, 47, 48, 49] y más recientemente por Cantrijn *et al.* [14, 15].

El principal objetivo de esta Memoria es estudiar distintos aspectos relacionados con las teorías clásicas de campos desde el enfoque de los formalismos  $k$ -simplético

y  $k$ -cosimpléctico, de modo que los resultados a los que se lleguen sean una generalización de la Mecánica Clásica autónoma y no autónoma.

Teniendo en cuenta que manejamos dos formalismos es por ello que la Memoria se divide en dos partes, la primera relativa al enfoque  $k$ -simpléctico y la segunda parte al  $k$ -cosimpléctico.

Un esquema general de esta Memoria es el siguiente:

- **Capítulo 1: Formulación  $k$ -simpléctica de las teorías clásicas de campos.**

En este capítulo recordamos la formulación hamiltoniana y lagrangiana  $k$ -simpléctica de las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl y de Euler-Lagrange. Esto tiene su punto de partida en la formulación polisimpléctica ( $k$ -simpléctica, [5, 6, 7]) desarrollada por Günther y que ha sido revisada y ampliada en [104, 107].

Además a esta formulación le hemos incorporado los principios variacionales de los que se obtienen las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange y de Hamilton.

- **Capítulo 2: Simetrías y leyes de conservación.**

Una simetría de una ecuación en derivadas parciales es un difeomorfismo que transforma soluciones de la ecuación en derivadas parciales en soluciones de la misma ecuación.

En este capítulo, en el contexto del formalismo  $k$ -simpléctico, estudiamos las simetrías de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl y de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Además establecemos una versión  $k$ -simpléctica del Teorema de Noether para cierto tipo de simetrías, asociándoles leyes de conservación.

En la última parte de este capítulo estudiamos los lagrangianos equivalentes, es decir, aquellos cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange tienen las mismas soluciones.

Relacionado con este último concepto aparecen las simetrías gauge como aquellos difeomorfismos que transforman un lagrangiano en otro equivalente.

Los contenidos de este capítulo pueden encontrarse en [119], trabajo realizado en colaboración con N. Román-Roy y M. Salgado.



- **Capítulo 3: Teorías de Campos con ligaduras no-holonómicas. Enfoque  $k$ -simpléctico.**

En la primera parte de este capítulo describimos, en términos geométricos, las ecuaciones de Euler-Lagrange con ligaduras no-holonómicas.

A continuación, bajo ciertas condiciones de regularidad, construimos un operador proyección. Este operador nos permite obtener a partir de una solución del problema libre una solución del problema con ligaduras.

A cada simetría lagrangiana no-holonómica le asociamos cierta ecuación en derivadas parciales, denominada *ecuación momento no-holonómica* de modo que todo campo solución del problema no-holonómico debe ser solución de esta ecuación. Esta ecuación que se define aquí va a jugar el papel de las leyes de conservación cuando no hay ligaduras.

Finalizamos este capítulo describiendo un ejemplo que se corresponde con la barra Cosserat y analizamos algunos casos particulares del modelo de teoría de campos no-holonómico descrito en este capítulo.

Los contenidos de este capítulo pueden encontrarse en [78], trabajo realizado en colaboración con los Profesores M. de León, D. Martín de Diego y M. Salgado.

- **Capítulo 4: Relación entre conexiones no-lineales en  $T_k^1Q$  y SOPDE's.**

A partir de cierta sucesión exacta corta de fibrados vectoriales reobtenemos todos los objetos geométricos necesarios para describir el formalismo lagrangiano  $k$ -simpléctico. Esta sucesión también nos permitirá introducir conexiones no lineales en  $T_k^1Q = TQ \oplus \overset{k}{\cdot} \cdot \oplus TQ$ .

Además estudiamos la relación que existe entre las conexiones no-lineales en  $T_k^1Q = TQ \oplus \overset{k}{\cdot} \cdot \oplus TQ$  y los SOPDE's. A cada conexión le podemos asociar un SOPDE y viceversa.

En el caso  $k = 1$  se reobtienen ciertos resultados de Griffone [53, 55] y Szilasi [131] entre otros.

- **Capítulo 5: Formulación  $k$ -simpléctica en algebroides de Lie.**

En este capítulo desarrollamos la formulación  $k$ -simpléctica en algebroides de Lie.

En el caso particular de que el algebroides de Lie sea el fibrado tangente reobtenemos la formulación  $k$ -simpléctica estándar que hemos desarrollado en el Capítulo 1.

En el caso  $k = 1$  reobtenemos la Mecánica Autónoma en algebroides de Lie desarrollada por Weinstein [140], E. Martínez [96] y otros.

■ **Capítulo 6: Formulación  $k$ -cosimpléctica de las Teorías Clásicas de Campos.**

En este capítulo recordamos la formulación  $k$ -cosimpléctica de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange y de Hamilton. Los contenidos que aquí se exponen se encuentran en su mayor parte en los trabajos de M. de León *et al.* [83, 84] y en [104].

Al estudio de esta formulación le hemos añadido los principios variacionales de los que se obtienen las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange y de Hamilton. Para describir estos principios hemos tomado como punto de partida los correspondientes principios variacionales del contexto multisimpléctico desarrollados por A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda y N. Román-Roy en [35, 36]

■ **Capítulo 7: Formalismo  $k$ -cosimpléctico y conexiones no-lineales en  $\mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ .**

En este capítulo estudiamos la influencia, en el desarrollo de la formulación  $k$ -cosimpléctica, de la elección de una conexión no-estándar en el fibrado trivial  $\mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

El principal resultado al que hemos llegado es que a cada conexión en dicho fibrado y a cada función lagrangiana le podemos asociar una función, llamada función energía, que nos permite establecer una correspondencia biyectiva entre el conjunto de soluciones de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange y el conjunto de soluciones de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl.

Los resultados obtenidos en este capítulo generalizan los correspondientes resultados de la descripción de la Mecánica dependiente del tiempo con conexiones no-estándar que pueden encontrarse en [34].

Los contenidos de este capítulo pueden encontrarse en [109], trabajo realizado en colaboración con M.C. Muñoz-Lecanda y M. Salgado.

■ **Capítulo 8: Formalismo  $k$ -cosimpléctico en algebroides de Lie.**

Desarrollamos la formulación  $k$ -cosimpléctica en algebroides de Lie. Cuando el algebroide de Lie es el fibrado tangente reobtenemos la formulación  $k$ -cosimpléctica estándar que se ha desarrollado en el Capítulo 6.

Además de estos ocho capítulos en la Memoria también se incluyen tres apéndices. El primero contiene las demostraciones completas de dos resultados del Capítulo 2; dada su extensión hemos preferido incluirlas en este apéndice. El segundo se dedica a exponer ciertos resultados relativos a los espacios vectoriales  $k$ -simplécticos que serán utilizados a lo largo de la Memoria y en el tercero se recoge la notación que se utiliza a lo largo de la misma.

# Parte I

## Teoría k-simpléctica



# Capítulo 1

## Formulación $k$ -simpléctica de las Teorías Clásicas de Campos

La primera parte de esta memoria tiene su punto de partida en la formulación polisimpléctica ( $k$ -simpléctica [5, 6, 7]) de las ecuaciones clásicas de campo desarrollada por Günther [56] y que ha sido revisada y ampliada en [104, 107].

La finalidad de este primer capítulo es revisar la formulación hamiltoniana y lagrangiana  $k$ -simpléctica de las teorías clásicas de campos de primer orden.

### 1.1. El enfoque hamiltoniano.

#### 1.1.1. Fundamentos geométricos.

A. El fibrado de las  $k^1$ -covelocidades.

Sea  $Q$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$  su fibrado cotangente. Denotemos por  $(T_k^1)^*Q$  la suma de Whitney de  $k$  copias del fibrado cotangente  $T^*Q$  de  $Q$ , esto es,

$$(T_k^1)^*Q = T^*Q \oplus \dots \oplus T^*Q.$$

Un elemento de  $(T_k^1)^*Q$  es una  $k$ -tupla  $(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}})$  de covectores en un mismo punto base  $\mathbf{q} \in Q$ .

Denotaremos por  $\pi_Q^k : (T_k^1)^*Q \rightarrow Q$  la proyección canónica definida por:

$$\pi_Q^k(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) = \mathbf{q}.$$

Si  $(q^i)_{1 \leq i \leq n}$  es un sistema local de coordenadas en un abierto  $U \subseteq Q$ , se definen las coordenadas locales inducidas  $(q^i, p_i)_{1 \leq i \leq n}$  en  $T^*U = (\pi_Q)^{-1}(U)$  como

$$q^i(\alpha_{\mathbf{q}}) = q^i(\mathbf{q}), \quad p_i(\alpha_{\mathbf{q}}) = \alpha_{\mathbf{q}} \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}} \right)$$

y las coordenadas locales inducidas  $(q^i, p_i^A)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$  en  $(T_k^1)^*U = (\pi_Q^k)^{-1}(U)$  como

$$q^i(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) = q^i(\mathbf{q}), \quad p_i^A(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) = \alpha_{A\mathbf{q}} \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}} \right).$$

Estas coordenadas reciben el nombre de **coordenadas canónicas de  $(T_k^1)^*Q$** . De esta manera  $(T_k^1)^*Q$  tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión  $n(k+1)$ .

**Observación 1.1** La variedad  $(T_k^1)^*Q$  puede describirse en términos de 1-jets de aplicaciones. Para ello se define en cada punto  $\mathbf{q} \in Q$  el siguiente conjunto,

$$(T_k^1)^*_{\mathbf{q}}Q = J_{\mathbf{q},0}^1(Q, \mathbb{R}^k) = \{j_{\mathbf{q},0}^1\sigma/\sigma : Q \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ diferenciable, } \sigma(\mathbf{q}) = 0\},$$

donde  $j_{\mathbf{q},0}^1\sigma$  denota el 1-jet de  $\sigma$  en el punto  $\mathbf{q} \in Q$ . Entonces,

$$(T_k^1)^*Q = \bigcup_{\mathbf{q} \in Q} (T_k^1)^*_{\mathbf{q}}Q = \bigcup_{\mathbf{q} \in Q} J_{\mathbf{q},0}^1(Q, \mathbb{R}^k) = J^1(Q, \mathbb{R}^k)_0.$$

Teniendo esto en cuenta se pueden identificar las variedades  $(T_k^1)^*Q$  y  $J^1(Q, \mathbb{R}^k)_0$  via el difeomorfismo dado por

$$\begin{aligned} J^1(Q, \mathbb{R}^k)_0 &\equiv T^*Q \oplus \overset{k}{\cdot} \cdot \oplus T^*Q = (T_k^1)^*Q \\ j_{\mathbf{q},0}^1\sigma &\equiv (d\sigma^1(\mathbf{q}), \dots, d\sigma^k(\mathbf{q})) \end{aligned}$$

donde  $\sigma^A = \hat{\pi}^A \circ \sigma : Q \rightarrow \mathbb{R}$  es la  $A$ -ésima componente de  $\sigma$ , y  $\hat{\pi}^A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  son las proyecciones canónicas,  $1 \leq A \leq k$ . Teniendo en cuenta esta descripción,  $(T_k^1)^*Q$  se denomina **fibrado de las  $k^1$ -covelocidades de la variedad  $Q$** .

El siguiente diagrama recoge la notación, que emplearemos a lo largo de esta memoria, para referirnos a las proyecciones canónicas relativas al fibrado de las  $k^1$ -covelocidades:

$$\begin{array}{ccc} (T_k^1)^*Q & \xrightarrow{\pi_Q^{k,A}} & T^*Q \\ & \searrow \pi_Q^k & \downarrow \pi_Q \\ & & Q \end{array}$$

en donde  $\pi_Q^{k,A} : (T_k^1)^*Q \rightarrow T^*Q$  es la proyección canónica definida como sigue:

$$\pi_Q^{k,A}(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) = \alpha_{A\mathbf{q}}, \quad 1 \leq A \leq k.$$

**B. Formas canónicas en  $(T_k^1)^*Q$ .**

En este epígrafe describiremos ciertas estructuras geométricas en  $(T_k^1)^*Q$ , que se definen de modo canónico. Estas estructuras serán utilizadas en la descripción  $k$ -simpléctica hamiltoniana, véase la sección 1.1.3.

**Definición 1.2** *De modo natural se definen, sobre  $(T_k^1)^*Q$ , las 1-formas canónicas  $\theta^1, \dots, \theta^k$  a través de la composición:*

$$\begin{array}{ccccc} & & \theta^A(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ T_{(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}})}((T_k^1)^*Q) & \xrightarrow{(\pi_Q^k)_*(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}})} & T_{\mathbf{q}}Q & \xrightarrow{\alpha_{A\mathbf{q}}} & \mathbb{R} \end{array}$$

esto es,

$$\theta^A(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}})(X_{(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}})}) := \alpha_{A\mathbf{q}}\left((\pi_Q^k)_*(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}})(X_{(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}})})\right) \quad (1.1)$$

para  $X_{(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}})} \in T_{(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}})}((T_k^1)^*Q)$ ,  $(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) \in (T_k^1)^*Q$  y  $\mathbf{q} \in Q$ .

A partir de las formas anteriores se definen las  $k$  2-formas presimplécticas,

$$\omega^A = -d\theta^A, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (1.2)$$

En un sistema local de coordenadas  $(q^i, p_i^A)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$  las formas canónicas se escriben como sigue:

$$\theta^A = p_i^A dq^i, \quad \omega^A = dq^i \wedge dp_i^A, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (1.3)$$

**Observación 1.3** Recordemos que  $(T_k^1)^*Q$  es la suma de Whitney de  $k$  copias del fibrado cotangente  $T^*Q$ . Teniendo en cuenta las expresiones locales (1.3) se observa que tanto las 1-formas  $\theta^1, \dots, \theta^k$  como las 2-formas  $\omega^1, \dots, \omega^k$  podrían obtenerse como el pull-back de la 1-forma de Liouville  $\theta$  y de la forma simpléctica canónica  $\omega$  de  $T^*Q$  respectivamente, es decir,

$$\theta^A = (\pi_Q^{k,A})^*\theta, \quad \omega^A = (\pi_Q^{k,A})^*\omega, \quad 1 \leq A \leq k.$$

◇

Es interesante recalcar que la *estructura polisimpléctica canónica* en  $(T_k^1)^*Q$ , introducida por Günther [56], es la 2-forma  $\mathbb{R}^k$ -valuada cerrada y no degenerada  $\bar{\omega} = \omega^A \otimes r_A$ , donde  $\{r_1, \dots, r_k\}$  denota la base canónica de  $\mathbb{R}^k$ .

Si denotamos  $\ker \omega^A = \{X \in T((T_k^1)^*Q) / \iota_X \omega^A = 0\}$  entonces de (1.3) se prueba sin dificultad que

$$\begin{aligned} \omega^A \Big|_{V \times V} &= 0, \quad 1 \leq A \leq k \\ \bigcap_{A=1}^k \ker \omega^A &= \{0\}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde  $V = \ker T(\pi_Q^k)$  es la distribución vertical de dimensión  $nk$  asociada a  $\pi_Q^k$ . Esta distribución está localmente dada por

$$V = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_i^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_i^k} \right\rangle_{i=1, \dots, n}. \tag{1.5}$$

C. Estructuras  $k$ -simplécticas,  $k$ -cotangentes y polisimplécticas.

A partir del modelo geométrico que se acaba de describir A. Awane introdujo las variedades  $k$ -simplécticas (véase [5, 6, 7]) dando la siguiente definición:

**Definición 1.4** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n(k+1)$ . Sea  $V$  una distribución integrable de dimensión  $nk$  y  $\omega^1, \dots, \omega^k$   $k$  2-formas diferenciales cerradas definidas sobre  $M$ . Se dice que  $(\omega^1, \dots, \omega^k, V)$  define una **estructura  $k$ -simpléctica** sobre  $M$  si

$$(1) \quad \omega^A \Big|_{V \times V} = 0, \quad 1 \leq A \leq k$$



$$(2) \quad \bigcap_{A=1}^k \ker \omega^A = \{0\}.$$

Una variedad  $M$  dotada de una estructura  $k$ -simpléctica se dice que es una **variedad  $k$ -simpléctica**.

En el apartado anterior hemos visto que  $(\omega^1, \dots, \omega^k, V)$  definen una estructura  $k$ -simpléctica sobre  $(T_k^1)^*Q$ . Además hemos visto que para un sistema de coordenadas canónicas  $(q^i, p_i^A)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$  las 2-formas diferenciales  $\omega^1, \dots, \omega^k$  tienen las expresiones locales dadas en (1.3). Para una variedad  $k$ -simpléctica arbitraria  $M$ , Awane ha demostrado que existen sistemas de coordenadas sobre  $M$  que permiten expresar localmente las 2-formas de una estructura  $k$ -simpléctica de modo análogo a (1.3).

**Teorema 1.5** (*Teorema de Darboux  $k$ -simpléctico*). Sea  $(M, \omega^1, \dots, \omega^k, V)$  una variedad  $k$ -simpléctica de dimensión  $n(k+1)$ , entonces para cada punto  $x \in M$  existe un sistema local de coordenadas  $(q^i, p_i^A)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$ , centrado en  $x \in M$ , tal que

$$\omega^A = dq^i \wedge dp_i^A, \quad 1 \leq A \leq k$$

y además

$$V = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_i^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_i^k} \right\rangle_{i=1, \dots, k}.$$

Dicho sistema de coordenadas recibe el nombre de **sistema de coordenadas adaptado**.

Como ya hemos comentado, el modelo canónico de las variedades  $k$ -simplécticas es  $((T_k^1)^*Q, \omega^1, \dots, \omega^k, V)$ . El fibrado de las  $k^1$ -covelocidades también es el modelo de las variedades casi  $k$ -cotangentes introducidas por M. de León *et al.* en [81], donde se definen las estructuras casi  $k$ -cotangentes y se describen como  $G$ -estructuras.

**Definición 1.6** Una estructura casi  $k$ -cotangente sobre una variedad  $M$  de dimensión  $n(k+1)$  es una familia  $(\omega^A, V^A; 1 \leq A \leq k)$ , donde cada  $\omega^A$  es una 2-forma de rango constante  $2n$  y  $V^A$  es una distribución en  $M$ , tal que

$$(i) \quad V^A \cap (\oplus_{B \neq A} V^B) = 0, \quad (ii) \quad \ker \omega^A = \oplus_{B \neq A} V^B, \quad (iii) \quad \omega^A \Big|_{V^A \times V^A} = 0$$

para todo  $A = 1, \dots, k$ .

El modelo canónico de esta estructura es  $(T_k^1)^*Q$  con las 2-formas  $\omega^A$  que hemos introducido en el apartado anterior y  $V^A = \ker T\rho_A$  donde

$$\begin{aligned} \rho_A : \quad (T_k^1)^*Q &\rightarrow (T_{k-1}^1)^*Q \\ (\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) &\mapsto (\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{A-1\mathbf{q}}, \alpha_{A+1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

La integrabilidad de estas estructuras se caracteriza como sigue:

**Proposición 1.7** *Una estructura casi k-cotangente  $(\omega^A, V^A; 1 \leq A \leq k)$  sobre  $M$  es integrable si, y sólo si, las 2-formas  $\omega^A$  son cerradas y la distribución  $V = V^1 \oplus \dots \oplus V^k$  es involutiva.*

**Definición 1.8** *Una estructura casi k-cotangente integrable se llama estructura k-cotangente.*

**Observación 1.9** Las estructuras k-cotangentes fueron introducidas independientemente por Awane [5, 6, 7] y denominadas estructuras k-simplécticas.

◇

Finalizamos este apartado recordando las estructuras polisimplécticas introducidas por Günther en [56].

Denotaremos por  $r_1, \dots, r_k$  la base canónica de  $\mathbb{R}^k$ .

**Definición 1.10** [56] *Una 2-forma  $\mathbb{R}^k$ -valuada, cerrada y no degenerada,*

$$\bar{\omega} = \sum_{A=1}^k \omega^A \otimes r_A,$$

*sobre una variedad  $M$  de dimensión  $n$  se llama **forma polisimpléctica**. El par  $(M, \bar{\omega})$  se llama **variedad polisimpléctica**.*

La estructura polisimpléctica canónica en  $(T_k^1)^*Q$  está determinada por la forma polisimpléctica  $\bar{\omega} = \sum_{A=1}^k \omega^A \otimes r_A$ , donde  $\omega^1, \dots, \omega^k$  son las formas canónicas en  $T_k^1Q$  que hemos introducido en el apartado anterior.

**Definición 1.11** (Günther,[56]). Una forma polisimpléctica  $\bar{\omega}$  sobre una variedad  $M$  se llama estándar si, y sólo si, en cada punto de  $M$  existe un sistema local de coordenadas tal que  $\omega^A$  se escribe localmente como en (1.3).

Así, la forma polisimpléctica canónica  $\bar{\omega}$  en  $(T_k^1)^*Q$  es estándar.

**Observación 1.12** Una estructura polisimpléctica estándar es equivalente a una estructura  $k$ -simpléctica.

Por tanto tenemos una equivalencia entre las estructuras  $k$ -simplécticas, las estructuras  $k$ -cotangentes y las estructuras polisimplécticas estándar.

◇

D. Levantamiento natural de difeomorfismos y campos de vectores de  $Q$  a  $(T_k^1)^*Q$ .

Sea  $f: M \rightarrow N$  un difeomorfismo, entonces la aplicación cotangente

$$T^*f: T^*N \rightarrow T^*M$$

está definida por

$$T^*f(\alpha_{f(m)}) = \alpha_{f(m)} \circ f_*(m).$$

A partir de la aplicación cotangente introducimos la siguiente definición.

**Definición 1.13** Sea  $f: M \rightarrow N$  un difeomorfismo. Llamamos **levantamiento natural o canónico** de  $f$  a los correspondientes fibrados de  $k^1$ -covelocidades a la aplicación

$$(T_k^1)^*f: (T_k^1)^*N \rightarrow (T_k^1)^*M$$

definida como sigue:

$$(T_k^1)^*f(\alpha_{1f(m)}, \dots, \alpha_{kf(m)}) = (T^*f(\alpha_{1f(m)}), \dots, T^*f(\alpha_{kf(m)}))$$

donde  $(\alpha_{1f(m)}, \dots, \alpha_{kf(m)}) \in (T_k^1)^*N$ ,  $m \in M$ .

El levantamiento canónico de difeomorfismos nos permite introducir el levantamiento canónico o completo de campos de vectores de  $Q$  a  $(T_k^1)^*Q$ .

**Definición 1.14** Sea  $Z$  un campo de vectores en  $Q$ , con grupo local 1-paramétrico de transformaciones  $\{h_s\}$ . Se denomina **levantamiento canónico o completo** de  $Z$  a  $(T_k^1)^*Q$  al campo de vectores  $Z^{C*}$  en  $(T_k^1)^*Q$  cuyo grupo local 1-paramétrico de transformaciones es  $\{(T_k^1)^*(h_s)\}$ .

Considerando coordenadas locales en  $(T_k^1)^*Q$ , si  $Z = Z^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ , la expresión local de  $Z^{C*}$  es

$$Z^{C*} = Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} - p_j^A \frac{\partial Z^j}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k^A}. \quad (1.6)$$

El levantamiento o prolongación canónica de difeomorfismos y campos de vectores de la variedad base  $Q$  a  $(T_k^1)^*Q$  tiene las siguientes propiedades:

**Lema 1.15**

(1) Sea  $\varphi: Q \rightarrow Q$  un difeomorfismo y  $\Phi = (T_k^1)^*\varphi$  el levantamiento canónico de  $\varphi$  a  $(T_k^1)^*Q$ . Entonces:

$$(i) \Phi^*\theta^A = \theta^A \quad , \quad (ii) \Phi^*\omega^A = \omega^A, \quad 1 \leq A \leq k.$$

(2) Sean  $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ , y  $Z^{C*}$  el levantamiento canónico de  $Z$  a  $(T_k^1)^*Q$ . Entonces

$$(i) \mathcal{L}_{Z^{C*}}\theta^A = 0 \quad , \quad (ii) \mathcal{L}_{Z^{C*}}\omega^A = 0, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (1.7)$$

*Demostración:*

(1) El apartado (i) es una consecuencia de la commutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} (T_k^1)^*Q & \xrightarrow{(T_k^1)^*\varphi} & (T_k^1)^*Q \\ \pi_Q^{k,A} \downarrow & & \downarrow \pi_Q^{k,A} \\ T^*Q & \xrightarrow{T^*\varphi} & T^*Q \end{array}$$

esto es,

$$\pi_Q^{k,A} \circ (T_k^1)^*\varphi = T^*\varphi \circ \pi_Q^{k,A}.$$

En efecto, se verifica que

$$\begin{aligned} [(T_k^1)^*\varphi]^*\theta^A &= [(T_k^1)^*\varphi]^*((\pi_Q^{k,A})^*\theta) = (T^*\varphi \circ \pi_Q^{k,A})^*\theta = (\pi_Q^{k,A})^*((T^*\varphi)^*\theta) \\ &= (\pi_Q^{k,A})^*\theta = \theta^A, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $(T^*\varphi)^*\theta = \theta$  (véase [1], pag. 180).

El apartado (ii) es una consecuencia directa de (i).

- (2) Puesto que el generador infinitesimal del levantamiento completo  $Z^{C*}$  de  $Z$  es la prolongación canónica del generador infinitesimal de  $Z$ , del apartado (1) se sigue que (1.7) se verifica.

□

### 1.1.2. Campos de $k$ -vectores y secciones integrales.

Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Consideramos la suma de Whitney

$$T_k^1 M = TM \oplus \dots \oplus TM$$

de  $k$ -copias del fibrado tangente  $TM$  y sea  $\tau_M^k : T_k^1 M \rightarrow M$  la proyección canónica. La variedad  $T_k^1 M$ , que recibe el nombre de fibrado tangente de  $k^1$ -velocidades, se describirá con detalle en la subsección 1.2.1.

**Definición 1.16** *Un campo de  $k$ -vectores en  $M$  es una sección  $\mathbf{X} : M \rightarrow T_k^1 M$  de la proyección canónica  $\tau_M^k$ .*

Puesto que  $T_k^1 M$  es la suma de Whitney  $TM \oplus \dots \oplus TM$  de  $k$  copias de  $TM$ , un campo de  $k$ -vectores  $\mathbf{X}$  define una familia de  $k$  campos de vectores  $\{X_1, \dots, X_k\}$  en  $M$ , a través de la proyección de  $\mathbf{X}$  sobre cada factor de  $T_k^1 M$ , tal como muestra el siguiente diagrama para cada  $A = 1, \dots, k$ :

$$\begin{array}{ccc} & & T_k^1 M \\ & \nearrow \mathbf{X} & \downarrow \tau_M^{k,A} \\ M & \xrightarrow{X_A} & TM \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} \tau_M^{k,A}: \quad T_k^1 M &\longrightarrow TM \\ (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) &\longmapsto \tau_M^{k,A}(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = v_{A\mathbf{q}} \end{aligned}$$

denota la proyección canónica sobre la  $A$ -ésima componente de  $T_k^1 M$ .

Por este motivo denotaremos un campo de  $k$ -vectores  $\mathbf{X}$  por  $(X_1, \dots, X_k)$ .

A continuación introduciremos el análogo, para campos de  $k$ -vectores, del concepto de curva integral de un campo de vectores.

**Definición 1.17** *Una sección integral de un campo de  $k$ -vectores  $(X_1, \dots, X_k)$ , pasando por un punto  $x \in M$ , es una aplicación  $\phi: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ , definida en algún entorno  $U_0 \subset \mathbb{R}^k$  de  $0 \in \mathbb{R}^k$  tal que*

$$\phi(0) = x, \quad \phi_*(\mathbf{t})\left(\frac{\partial}{\partial t^A}\Big|_{\mathbf{t}}\right) = X_A(\phi(\mathbf{t})) \quad \text{para todo } \mathbf{t} \in U_0, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (1.8)$$

*Diremos que un campo de  $k$ -vectores  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  en  $M$  es integrable si existe una sección integral pasando por cada punto de  $M$ .*

La condición (1.8) es equivalente a exigir que  $\mathbf{X} \circ \phi = \phi^{(1)}$  en donde  $\phi^{(1)}$  es la primera prolongación de  $\phi$  definida por

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} : U_0 \subseteq \mathbb{R}^k &\longrightarrow T_k^1 M \\ \mathbf{t} &\longmapsto \phi^{(1)}(\mathbf{t}) = \left( \phi_*(\mathbf{t})\left(\frac{\partial}{\partial t^1}\Big|_{\mathbf{t}}\right), \dots, \phi_*(\mathbf{t})\left(\frac{\partial}{\partial t^k}\Big|_{\mathbf{t}}\right) \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Utilizando coordenadas  $(q^i, v_A^i)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$  en  $T_k^1 M$  podemos escribir

$$\phi^{(1)}(\mathbf{t}) = \left( \phi^i(\mathbf{t}), \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A}\Big|_{\mathbf{t}} \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k} \quad (1.10)$$

y

$$X_A = (X_A)^i \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad A = 1, \dots, k.$$

En este caso se obtiene que  $\phi$  es una sección integral de  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  si, y sólo si, se verifica el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial t^A}\Big|_{\mathbf{t}} = [(X_A)^i \circ \phi](\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in U_0 \subseteq \mathbb{R}^k, \quad 1 \leq A \leq k, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.11)$$

**Observación 1.18** El motivo por el que se han introducido los campos de  $k$ -vectores y las correspondientes secciones integrales es el siguiente: en el formalismo  $k$ -simpléctico las soluciones de las ecuaciones de campo se obtienen como secciones integrales de ciertos campos de  $k$ -vectores en  $M$ .

◇

### 1.1.3. Formalismo hamiltoniano. Ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl.

En esta sección vamos a describir los sistemas hamiltonianos sobre variedades  $k$ -simplécticas, para ello vamos a deducir las ecuaciones de campo hamiltonianas a partir de un principio variacional para después recordar la descripción geométrica de estas ecuaciones. Comenzaremos la subsección describiendo un caso particular de sistema hamiltoniano que se corresponde con las ecuaciones de la electrostática.

#### A. Ejemplo: ecuaciones de la electrostática.

Sobre el espacio  $\mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(t^1, t^2, t^3)$  consideramos una métrica de Riemann  $g$  con componentes  $g_{AB}(\mathbf{t})$ ,  $1 \leq A, B \leq 3$ .

Las ecuaciones locales de la electrostática son (véase [31, 62]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t^A} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{B=1}^3 g_{AB} \psi^B, \\ \sum_{A=1}^3 \frac{\partial \psi^A}{\partial t^A} &= -4\pi \sqrt{g} r, \end{aligned}$$

donde  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es un campo escalar que da el potencial eléctrico sobre  $\mathbb{R}^3$ ,  $P = (\psi^1, \psi^2, \psi^3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es un campo vectorial que establece el campo eléctrico sobre  $\mathbb{R}^3$ ,  $\sqrt{g} = \sqrt{\det g_{AB}}$  y  $r = r(\mathbf{t})$  es la función escalar sobre  $\mathbb{R}^3$  determinada por:

$$p_Q(\mathbf{t}) = \sqrt{g} r(\mathbf{t}) dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3,$$

siendo  $p_Q(\mathbf{t})$  la 3-forma en  $\mathbb{R}^3$  que determina la densidad de carga, y que es un dato conocido.

Supongamos que la métrica  $g$  sobre  $\mathbb{R}^3$  es la métrica euclídea, así las ecuaciones anteriores se escriben como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t^A} &= \psi^A, \\ -\left(\frac{\partial \psi^1}{\partial t^1} + \frac{\partial \psi^2}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi^3}{\partial t^3}\right) &= 4\pi r. \end{aligned}$$

Si definimos la función

$$H(q, p^1, p^2, p^3) = 4\pi r q + \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (p^A)^2$$

donde  $q$  representa la variable  $\psi$  y  $p^A$  las variables  $\psi^A$  que componen  $P$ , entonces se verifica

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 4\pi r, \quad \frac{\partial H}{\partial p^A} = p^A.$$

Ahora, evaluando las identidades previas en  $\psi(\mathbf{t}) = (\psi(\mathbf{t}), \psi^1(\mathbf{t}), \psi^2(\mathbf{t}), \psi^3(\mathbf{t}))$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} &= 4\pi r = - \sum_{A=1}^3 \frac{\partial \psi^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, \\ \frac{\partial H}{\partial p^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} &= \psi^A(\mathbf{t}) = \frac{\partial \psi}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}. \end{aligned}$$

Así las ecuaciones de la electrostática se pueden escribir como sigue

$$\frac{\partial H}{\partial q} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = - \sum_{A=1}^3 \frac{\partial \psi^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, \quad \frac{\partial H}{\partial p^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = \frac{\partial \psi}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}},$$

siendo un ejemplo de las denominadas ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl.

En general, a partir de un principio variacional, que se describirá en el siguiente apartado, se obtienen las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl clásicas,

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = - \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, \quad 1 \leq A \leq k, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1.12)$$



donde cada solución es una aplicación

$$\psi(t^1, \dots, t^k) = (\psi^i(t^1, \dots, t^k), \psi_i^A(t^1, \dots, t^k)), \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k$$

y  $H$  es una función de las variables  $q^i, p_i^A$  donde  $q^i$  representa a la variable  $\psi^i$  y  $p_i^A$  a  $\psi_i^A$ . En las ecuaciones de la electrostática se tiene  $i = 1$  y  $k = 3$ .

### B. Principio variacional

En el desarrollo de la Mecánica hamiltoniana autónoma las ecuaciones de Hamilton se obtienen a partir de un principio variacional. El desarrollo formal de la formulación hamiltoniana de la Mecánica Clásica puede generalizarse a la teoría de campos clásica. En este caso el problema se transforma en encontrar los extremales de un problema variacional asociado a integrales múltiples de densidades hamiltonianas.

En este apartado vamos a describir el principio variacional del que se obtienen formalmente las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl.

Por simplicidad desarrollaremos este apartado en el fibrado de  $k^1$ -covelocidades  $((T_k^1)^*Q, \omega^1, \dots, \omega^k, V)$ , esto es, en el modelo canónico de las variedades  $k$ -simpléticas, sin embargo, teniendo en cuenta el teorema de Darboux 1.5 se podría hacer una descripción análoga en una variedad  $k$ -simplética arbitraria.

**Definición 1.19** Denotemos por  $\mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^k, (T_k^1)^*Q)$  el conjunto de aplicaciones

$$\psi : U_0 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^*Q,$$

con soporte compacto, definidas en un conjunto abierto  $U_0$ . Sea  $H : (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  un hamiltoniano, se define la acción integral asociada a  $H$  por

$$\mathcal{H} : \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^k, (T_k^1)^*Q) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi \mapsto \mathcal{H}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^k} \left( \sum_{A=1}^k (\psi^* \theta^A) \wedge d^{k-1} \mathbf{t}^A - (\psi^* H) d^k \mathbf{t} \right),$$

en donde  $d^k \mathbf{t} = dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k$  es una forma de volumen en  $\mathbb{R}^k$  y  $d^{k-1} t^A = \iota_{\frac{\partial}{\partial t^A}} d^k \mathbf{t}$  es una  $(k-1)$ -forma en  $\mathbb{R}^k$ .

**Definición 1.20** Una aplicación  $\psi : U_0 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^*Q$ , perteneciente al conjunto  $\mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^k, (T_k^1)^*Q)$ , es un extremal de  $\mathcal{H}$  si

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{H}(\sigma_s \circ \psi) = 0$$

para cada flujo  $\sigma_s$  en  $(T_k^1)^*Q$  tal que  $\sigma_s(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) = (\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}})$  para todo  $(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}})$  de la frontera de  $\psi(U_0) \subset (T_k^1)^*Q$ .

Obsérvese que los flujos  $\sigma_s : (T_k^1)^*Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$  considerados en la definición anterior están generados por campos de vectores en  $(T_k^1)^*Q$  que se anulan en la frontera de  $\psi(U_0)$ .

El problema variacional, asociado a un hamiltoniano  $H$ , consiste en encontrar los extremales de la acción integral  $\mathcal{H}$ .

En la siguiente proposición caracterizaremos los extremales de la acción  $\mathcal{H}$  asociada a un hamiltoniano  $H$ .

**Proposición 1.21** Sea  $H : (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  un hamiltoniano y  $\psi \in \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^k, T_k^1Q)$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $\psi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1Q$  es un extremal del problema variacional asociado a  $H$ .
- (2) Para cada campo de vectores  $Z$  en  $Q$ , tal que su levantamiento completo  $Z^{C*}$  a  $(T_k^1)^*Q$  se anula en los puntos de la frontera de  $\psi(U_0)$ , se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^k} ([\psi^*(\mathcal{L}_{Z^{C*}}\theta^A)] \wedge d^{k-1}\mathbf{t}^A - [\psi^*(\mathcal{L}_{Z^{C*}}H)] d\mathbf{t}^k) = 0.$$

- (3)  $\psi$  es solución de las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl, esto es, si  $\psi$  está localmente dada por  $\psi(\mathbf{t}) = (\psi^i(\mathbf{t}), \psi_i^A(\mathbf{t}))$ , entonces las funciones  $\psi^i, \psi_i^A$  satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales,

$$\sum_{A=1}^k \left. \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} = - \left. \frac{\partial H}{\partial q^i} \right|_{\psi(\mathbf{t})}, \quad \left. \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} = \left. \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \right|_{\psi(\mathbf{t})}, \quad i = 1 \dots, n. \quad (1.13)$$

*Demostración:*

(1  $\Leftrightarrow$  2) Sea  $Z \in \mathfrak{X}(Q)$  un campo de vectores en  $Q$ , verificando las condiciones del ítem (2), con grupo uniparamétrico  $\tau_s$ . Entonces  $Z^{C*}$  tiene grupo uniparamétrico asociado  $(T_k^1)^*\tau_s$ .

Se verifica:

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{H}((T_k^1)^* \tau_s \circ \psi) \\
 = & \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \int_{\mathbb{R}^k} \left( \sum_{A=1}^k ([ (T_k^1)^* \tau_s \circ \psi ]^* \theta^A) \wedge d^{k-1} \mathbf{t}^A - ([ (T_k^1)^* \tau_s \circ \psi ]^* H) d^k \mathbf{t} \right) \\
 = & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left( \int_{\mathbb{R}^k} \left( \sum_{A=1}^k ([ (T_k^1)^* \tau_s \circ \psi ]^* \theta^A) \wedge d^{k-1} \mathbf{t}^A - ([ (T_k^1)^* \tau_s \circ \psi ]^* H) d^k \mathbf{t} \right) \right. \\
 & \left. - \int_{\mathbb{R}^k} \left( \sum_{A=1}^k ([ (T_k^1)^* \tau_0 \circ \psi ]^* \theta^A) \wedge d^{k-1} \mathbf{t}^A - ([ (T_k^1)^* \tau_0 \circ \psi ]^* H) d^k \mathbf{t} \right) \right) \\
 = & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left( \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{A=1}^k ([ (T_k^1)^* \tau_s \circ \psi ]^* \theta^A) \wedge d^{k-1} \mathbf{t}^A - \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{A=1}^k (\psi^* \theta^A) \wedge d^{k-1} \mathbf{t}^A \right) \\
 & - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left( \int_{\mathbb{R}^k} ([ (T_k^1)^* \tau_s \circ \psi ]^* H) d^k \mathbf{t} - \int_{\mathbb{R}^k} (\psi^* H) d^k \mathbf{t} \right) \\
 = & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left( \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{A=1}^k [\psi^* ((T_k^1)^* \tau_s)^* \theta^A - \theta^A] \wedge d^{k-1} \mathbf{t}^A \right) \\
 & - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left( \int_{\mathbb{R}^k} [\psi^* ((T_k^1)^* \tau_s)^* H - H] d^k \mathbf{t} \right) \\
 = & \int_{\mathbb{R}^k} ([\psi^* (\mathcal{L}_{ZC^*} \theta^A)] \wedge d^{k-1} \mathbf{t}^A - [\psi^* (\mathcal{L}_{ZC^*} H)] d^k \mathbf{t}) ,
 \end{aligned}$$

con lo que el resultado buscado se sigue inmediatamente.

(2  $\Leftrightarrow$  3)

Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{L}_{ZC^*} \theta^A = d\iota_{ZC^*} \theta^A + \iota_{ZC^*} d\theta^A$$

se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^k} [\psi^* (\mathcal{L}_{ZC^*} \theta^A)] \wedge d^{k-1} \mathbf{t}^A = \int_{\mathbb{R}^k} [\psi^* (d\iota_{ZC^*} \theta^A)] \wedge d^{k-1} \mathbf{t}^A + \int_{\mathbb{R}^k} [\psi^* (\iota_{ZC^*} d\theta^A)] \wedge d^{k-1} \mathbf{t}^A .$$

Puesto que

$$[\psi^*(d\iota_{ZC^*}\theta^A)] \wedge d^{k-1}\mathbf{t}^A = d\left(\psi^*(\iota_{ZC^*}\theta^A) \wedge d^{k-1}\mathbf{t}^A\right)$$

entonces  $[\psi^*(d\iota_{ZC^*}\theta^A)] \wedge d^{k-1}\mathbf{t}^A$  es una  $k$ -forma cerrada en  $\mathbb{R}^k$ . Por lo tanto, aplicando el teorema de Stokes se obtiene:

$$\int_{\mathbb{R}^k} [\psi^*(d\iota_{ZC^*}\theta^A)] \wedge d^{k-1}\mathbf{t}^A = \int_{\mathbb{R}^k} d\left(\psi^*(\iota_{ZC^*}\theta^A) \wedge d^{k-1}\mathbf{t}^A\right) = 0.$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^k} ([\psi^*(\mathcal{L}_{ZC^*}\theta^A)] \wedge d^{k-1}\mathbf{t}^A - [\psi^*(\mathcal{L}_{ZC^*}H)]d^k\mathbf{t}) = 0$$

si, y sólo si,

$$\int_{\mathbb{R}^k} ([\psi^*(\iota_{ZC^*}d\theta^A)] \wedge d^{k-1}\mathbf{t}^A - [\psi^*(\mathcal{L}_{ZC^*}H)]d^k\mathbf{t}) = 0.$$

Consideremos un sistema local de coordenadas tal que  $Z = Z^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ , teniendo en cuenta la expresión (1.6) para el levantamiento completo  $Z^{C^*}$  y que  $\psi(\mathbf{t}) = (\psi^i(\mathbf{t}), \psi_i^A(\mathbf{t}))$  se verifica:

$$\begin{aligned} & \psi^*(\iota_{ZC^*}d\theta^A) \wedge d^{k-1}\mathbf{t}^A - \psi^*(\mathcal{L}_{ZC^*}H)d^k\mathbf{t} \\ &= \left[ -(Z^i(\mathbf{t})) \left( \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) - \sum_{A=1}^k \psi_j^A(\mathbf{t}) \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) \right] d^k\mathbf{t} \end{aligned}$$

para cada campo  $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ , (en las condiciones del enunciado de esta proposición), en donde empleamos la notación  $Z^i(\mathbf{t}) := (Z^i \circ \pi_Q^* \circ \psi)(\mathbf{t})$ . De esta última expresión se deduce que  $\psi$  es un extremal de  $\mathcal{H}$  si, y sólo si

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^k} Z^i(\mathbf{t}) \left( \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) d^k\mathbf{t} + \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{A=1}^k \psi_j^A(\mathbf{t}) \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) d^k\mathbf{t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo  $Z^i$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^k} (Z^i(\mathbf{t})) \left( \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) d^k\mathbf{t} = 0 \\ & \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{A=1}^k \psi_j^A(\mathbf{t}) \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) d^k\mathbf{t} = 0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

para todo  $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ , en las condiciones del enunciado, y por tanto para cada función  $Z^i(\mathbf{q})$  y  $\frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}}$ .

Aplicando el teorema fundamental del cálculo variacional, de (1.14) se obtiene que,

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = 0 \quad , \quad \sum_{A=1}^k \psi_j^A(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) = 0 .$$

El primer grupo de estas ecuaciones nos proporciona el primer grupo de las ecuaciones de Hamilton (1.13).

Para obtener el segundo grupo partimos de la segunda de las ecuaciones anteriores. Teniendo en cuenta que en un entorno coordinado  $(U; q^i, p_i^A)$  existe un extremo de  $\mathcal{H}$  pasando por cada punto de  $U$  se deduce que

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = 0 ,$$

que es el segundo grupo de las ecuaciones de Hamilton (1.13).

El recíproco se obtiene partiendo de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl sin más que considerar los cálculos efectuados a lo largo de la demostración.

□

### C. Versión geométrica de las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl.

A continuación veremos una nueva descripción de las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl (1.17) en la que emplearemos la geometría que nos proporcionan las variedades  $k$ -simpléticas. En esta descripción obtenemos las soluciones de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (1.17) como secciones integrales de ciertos campos de  $k$ -vectores. (Véase [56, 104, 107]).

Sea  $(M, \omega^1, \dots, \omega^k, V)$  una variedad  $k$ -simplética y sea  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función hamiltoniana definida sobre  $M$ .

A partir de ahora, en esta primera parte de la memoria, para hacer referencia a una variedad  $k$ -simplética y a una función hamiltoniana definida en ella emplearemos la siguiente definición:

**Definición 1.22** Sea  $(M, \omega^1, \dots, \omega^k, V)$  una variedad  $k$ -simpléctica y  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función hamiltoniana. A la familia  $(M, \omega^A, H)$  la denominaremos **sistema hamiltoniano  $k$ -simpléctico**.

El principal resultado de esta sección se recoge en el siguiente teorema.

**Teorema 1.23** Sea  $(M, \omega^A, H)$  un sistema hamiltoniano  $k$ -simpléctico y sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  un campo de  $k$ -vectores en  $M$  solución de la ecuación

$$\sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega^A = dH. \quad (1.15)$$

Si  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow M$  es una sección integral de  $\mathbf{X}$ , entonces  $\psi$  es solución de las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl (1.13).

*Demostración:*

Consideremos un campo de  $k$ -vectores  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  solución de la ecuación (1.15).

Si cada  $X_A$ ,  $1 \leq A \leq k$  se expresa en coordenadas canónicas  $(q^i, p_i^A)$  como

$$X_A = (X_A)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_A)_i^B \frac{\partial}{\partial p_i^B} \quad (1.16)$$

entonces la ecuación (1.15) se puede expresar localmente como sigue:

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = - \sum_{B=1}^k (X_B)_i^B, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i^A} = (X_A)^i, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k \quad (1.17)$$

Si el campo de  $k$ -vectores  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  es integrable y  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ ,  $\psi(\mathbf{t}) = (\psi^i(\mathbf{t}), \psi_i^A(\mathbf{t}))$ , es una sección integral del mismo, de (1.17) obtenemos

$$\left. \frac{\partial H}{\partial q^i} \right|_{\psi(t)} = - \sum_{B=1}^k \left. \frac{\partial \psi_i^B}{\partial t^B} \right|_t, \quad \left. \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \right|_{\psi(t)} = \left. \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \right|_t, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k$$

que son las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl.

□

Teniendo en cuenta el teorema anterior, las ecuaciones (1.15) se pueden considerar como una versión geométrica de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl. A partir de ahora denominaremos a estas ecuaciones (1.15) como **ecuaciones geométricas hamiltonianas  $k$ -simplécticas**.

Denotaremos por  $\mathfrak{X}_H^k(M)$  el conjunto de campos de  $k$ -vectores que son solución de (1.15), es decir,

$$\mathfrak{X}_H^k(M) := \{ \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k) / \tau_M^k \circ \mathbf{X} = id_M \quad \text{y} \quad \sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega^A = dH \}.$$

A los elementos de este conjunto los llamaremos **campos de  $k$ -vectores hamiltonianos**.

**Observación 1.24** Nótese que la existencia de solución de la ecuación geométrica hamiltoniana (1.15) está garantizada. En efecto, podríamos definir  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  localmente como

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_i^1} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i^1} \\ X_A &= \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad 2 \leq A \leq k \end{aligned} \tag{1.18}$$

y usando una partición de la unidad podríamos encontrar un campo de  $k$ -vectores  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ , globalmente definido, verificando (1.15).

Además, las soluciones de la ecuación (1.15) no son necesariamente únicas puesto que dichas soluciones vendrían dadas por  $(X_1, \dots, X_k) + Ker \Omega^\sharp$  en donde  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  es una solución particular y  $\Omega^\sharp : T_k^1 M \rightarrow T^*M$  es la aplicación definida

$$\text{por } \Omega^\sharp(Y_1, \dots, Y_k) = \sum_{A=1}^k \iota_{Y_A} \omega^A \text{ (véase [104]).}$$

◇

## 1.2. El enfoque lagrangiano.

En esta sección recordaremos los principales elementos y resultados de la formulación lagrangiana  $k$ -simpléctica de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (véase [56, 104, 107]).

### 1.2.1. Elementos geométricos.

En esta subsección vamos a describir los elementos geométricos que son necesarios para desarrollar el formalismo lagrangiano  $k$ -simpléctico. Comenzamos introduciendo la variedad sobre la que se desarrolla este formalismo, la cual denotaremos por  $T_k^1 Q$  y a continuación los objetos geométricos que en ella podemos definir.

#### A. El fibrado tangente de $k^1$ -velocidades.

Sea  $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$  el fibrado tangente de una variedad diferenciable  $Q$  de dimensión  $n$ . Denotemos por  $T_k^1 Q$  la suma de Whitney de  $k$  copias del fibrado tangente  $TQ$ , esto es,

$$T_k^1 Q = TQ \oplus \dots \oplus TQ.$$

Así los elementos de  $T_k^1 Q$  son  $k$ -tuplas  $(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})$  de vectores tangentes a  $Q$  en un mismo punto  $\mathbf{q} \in Q$ .

Denotaremos por  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$  la proyección canónica definida por

$$\tau_Q^k(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = \mathbf{q}.$$

Dado un sistema de coordenadas locales  $(q^i)_{1 \leq i \leq n}$  en  $U \subset Q$ , se define el sistema de coordenadas locales  $(q^i, v_A^i)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$  inducido en  $T_k^1 U \equiv (\tau_Q^k)^{-1}(U) \subset T_k^1 Q$  por:

$$q^i(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = q^i(\mathbf{q}), \quad v_A^i(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = v_{A\mathbf{q}}(q^i) = (dq^i)_{\mathbf{q}}(v_{A\mathbf{q}}) \quad (1.19)$$

donde  $(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) \in T_k^1 Q$ . Estas coordenadas reciben el nombre de **coordenadas canónicas** y dotan a  $T_k^1 Q$  de una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $n(k+1)$  llamada **fibrado tangente de  $k^1$ -velocidades**.

**Observación 1.25** El fibrado tangente de  $k^1$ -velocidades puede describirse en términos de 1-jets del siguiente modo (véase [86, 125]):

Para cada  $\mathbf{q} \in Q$  se define el espacio tangente de  $k^1$ -velocidades de  $Q$  en el punto  $\mathbf{q} \in Q$  como sigue

$$(T_k^1 Q)_{\mathbf{q}} Q = \{j_{0,\mathbf{q}}^1 \phi / \phi : \mathbb{R}^k \rightarrow Q \text{ diferenciable, } \phi(0) = \mathbf{q}\} = J_{0,\mathbf{q}}^1(\mathbb{R}^k, Q)$$

donde  $j_{0,\mathbf{q}}^1 \phi$  denota el 1-jet de la aplicación  $\phi$  en el punto  $0 \in \mathbb{R}^k$  tal que  $\phi(0) = \mathbf{q}$ . Entonces, el fibrado tangente de  $k^1$ -velocidades de  $Q$  es

$$T_k^1 Q = \bigcup_{\mathbf{q} \in Q} (T_k^1 Q)_{\mathbf{q}} Q = \bigcup_{\mathbf{q} \in Q} J_{0,\mathbf{q}}^1(\mathbb{R}^k, Q) = J_0^1(\mathbb{R}^k, Q).$$



El difeomorfismo que identifica los fibrados  $T_k^1 Q$  y  $J_0^1(\mathbb{R}^k, Q)$  está dado por:

$$\begin{aligned} J_0^1(\mathbb{R}^k, Q) &\equiv TQ \oplus \dots \oplus TQ \\ j_{0,\mathbf{q}}^1 \phi &\equiv (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{q} = \phi(0)$ , y  $v_{A\mathbf{q}} = \phi_*(0)[(\partial/\partial t^A)(0)]$ ,  $A = 1, \dots, k$ .

El sistema local de coordenadas  $(q^i, v_A^i)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$  en  $T_k^1 U \subset T_k^1 Q$ , introducido en (1.19), se define en términos de jets como sigue:

$$q^i(j_{0,\mathbf{q}}^1 \phi) = q^i(\mathbf{q}), \quad v_A^i(j_{0,\mathbf{q}}^1 \phi) = \left. \frac{\partial(q^i \circ \phi)}{\partial t^A} \right|_{t=0},$$

donde  $t = (t^1, \dots, t^k) \in \mathbb{R}^k$ .

◇

B. Levantamientos verticales de campos de vectores de  $Q$  a  $T_k^1 Q$ .

**Definición 1.26** Sea  $u_{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}} Q$  un vector tangente a  $Q$  en el punto  $\mathbf{q} \in Q$ . Para cada  $A = 1, \dots, k$ , definimos su **levantamiento vertical  $A$ -ésimo**,  $(u_{\mathbf{q}})^{V_A}$ , como el campo de vectores en la fibra  $(\tau_Q^k)^{-1}(\mathbf{q}) \subset T_k^1 Q$  dado por

$$(u_{\mathbf{q}})^{V_A}_{w_{\mathbf{q}}} = \left. \frac{d}{ds} (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{A-1\mathbf{q}}, v_{A\mathbf{q}} + s u_{\mathbf{q}}, v_{A+1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) \right|_{s=0} \quad (1.20)$$

para todo punto  $w_{\mathbf{q}} = (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) \in (\tau_Q^k)^{-1}(\mathbf{q}) \subset T_k^1 Q$ .

En un sistema local de coordenadas, si  $u_{\mathbf{q}} = u^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}}$  entonces

$$(u_{\mathbf{q}})^{V_A}_{w_{\mathbf{q}}} = u^i \frac{\partial}{\partial v_A^i} \Big|_{w_{\mathbf{q}}} . \quad (1.21)$$

El levantamiento vertical de vectores induce el levantamiento vertical de campos de vectores.

**Definición 1.27** Sea  $X$  un campo de vectores en  $Q$ . Se llama **levantamiento vertical  $A$ -ésimo** de  $X$  a  $T_k^1 Q$ ,  $1 \leq A \leq k$ , al campo de vectores  $X^{V_A} \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$  definido como sigue

$$X^{V_A}(w_{\mathbf{q}}) = (X(\mathbf{q}))_{w_{\mathbf{q}}}^{V_A}, \quad (1.22)$$

para todo elemento  $w_{\mathbf{q}} = (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) \in T_k^1 Q$ .

En un sistema de coordenadas canónicas, si  $X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i}$  entonces de (1.21) se sigue

$$X^{V_A} = (X^i \circ \tau_Q^k) \frac{\partial}{\partial v_A^i}, \quad (1.23)$$

puesto que

$$(X(\mathbf{q}))_{w_{\mathbf{q}}}^{V_A} = (X^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}})_{w_{\mathbf{q}}}^{V_A} = X^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial v_A^i} \Big|_{w_{\mathbf{q}}} = (X^i \circ \tau_Q^k)(w_{\mathbf{q}}) \frac{\partial}{\partial v_A^i} \Big|_{w_{\mathbf{q}}}.$$

C. Estructura  $k$ -tangente canónica.

Los levantamientos verticales de vectores y campos de vectores que acabamos de ver nos permiten introducir una familia  $\{J^1, \dots, J^k\}$  de endomorfismos del espacio tangente de  $T_k^1 Q$ .

**Definición 1.28** Para cada  $A = 1, \dots, k$  se define el campo de tensores  $J^A$  de tipo  $(1, 1)$  sobre  $T_k^1 Q$  como sigue:

$$J^A(w_{\mathbf{q}})(Z_{w_{\mathbf{q}}}) = \left( (\tau_Q^k)_*(w_{\mathbf{q}})(Z_{w_{\mathbf{q}}}) \right)_{w_{\mathbf{q}}}^{V_A} \quad (1.24)$$

en donde  $Z_{w_{\mathbf{q}}} \in T_{w_{\mathbf{q}}}(T_k^1 Q)$  y  $w_{\mathbf{q}} \in T_k^1 Q$ .

Utilizando las coordenadas canónicas descritas en (1.19), de (1.21) y (1.24) obtenemos que la expresión local del tensor  $J^A$  es

$$J^A = \frac{\partial}{\partial v_A^i} \otimes dq^i, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (1.25)$$

**Observación 1.29** Los campos de tensores  $\{J^1, \dots, J^k\}$  pueden obtenerse como el  $(0, \dots, 0, \overset{A}{1}, 0, \dots, 0)$ -levantamiento del tensor identidad de  $Q$  a  $T_k^1 Q$  definido por Morimoto (véase [105]).

◇

Este conjunto de campos de tensores  $\{J^1, \dots, J^k\}$  definen la **estructura  $k$ -tangente canónica** sobre  $T_k^1 Q$ . Éste es el modelo a partir del cual M. de León *et al.* (véanse [80, 82]) definen las estructuras  $k$ -tangentes sobre una variedad, las cuales generalizan las estructuras tangentes. De hecho, en el caso  $k = 1$ ,  $J = J^1$  es la conocida estructura tangente canónica (también llamada endomorfismo vertical) del fibrado tangente, (véase [30, 53, 63]). Además estas estructuras son importantes en el desarrollo del formalismo lagrangiano como veremos más adelante.

D. Campos de vectores canónicos.

Un objeto geométrico importante en el fibrado  $T_k^1 Q$  es el campo de vectores de Liouville generalizado.

**Definición 1.30** *El campo de vectores de Liouville  $\Delta$  sobre  $T_k^1 Q$  se define como el generador infinitesimal del flujo dado por*

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} \times T_k^1 Q &\longrightarrow T_k^1 Q \\ (s, (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})) &\mapsto (e^s v_{1\mathbf{q}}, \dots, e^s v_{k\mathbf{q}}). \end{aligned} \quad (1.26)$$

*Su expresión en coordenadas locales es*

$$\Delta = \sum_{i,A} v_A^i \frac{\partial}{\partial v_A^i}. \quad (1.27)$$

**Definición 1.31** *Los campos de vectores canónicos  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  sobre  $T_k^1 Q$  se definen como los generadores infinitesimales de los flujos dados por*

$$\begin{aligned} \psi^A : \mathbb{R} \times T_k^1 Q &\longrightarrow T_k^1 Q \\ (s, (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})) &\mapsto (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{A-1\mathbf{q}}, e^s v_{A\mathbf{q}}, v_{A+1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}), \end{aligned} \quad (1.28)$$

*para cada  $A = 1, \dots, k$ . Su expresión local es:*

$$\Delta_A = \sum_{i=1}^n v_A^i \frac{\partial}{\partial v_A^i}, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (1.29)$$

A partir de las expresiones (1.27) y (1.29) se comprueba sin dificultad que:

$$\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_k.$$

**Observación 1.32** El campo de Liouville generalizado y los campos de vectores canónicos aquí definidos también podrían definirse a partir del levantamiento vertical  $A$ -ésimo introducido en el apartado anterior. Esta definición alternativa sería la siguiente:

$$\Delta(w_{\mathbf{q}}) = \sum_{A=1}^k (v_{A\mathbf{q}})_{w_{\mathbf{q}}}^{V_A}, \quad \Delta_A(w_{\mathbf{q}}) = (v_{A\mathbf{q}})_{w_{\mathbf{q}}}^{V_A}, \quad 1 \leq A \leq k$$

siendo  $w_{\mathbf{q}} = (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) \in T_k^1 Q$ . A partir de las expresiones locales (1.21), (1.27) y (1.29) las identidades anteriores se siguen de forma inmediata

◇

E. Formas lagrangianas en  $T_k^1 Q$ .

De modo análogo a lo que ocurre en los sistemas mecánicos, a partir de la estructura  $k$ -tangente de  $T_k^1 Q$  y dada  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función a la que denominamos **función lagrangiana**, se definen las siguientes  $k$  1-formas diferenciales en  $T_k^1 Q$ :

$$\theta_L^A = dL \circ J^A, \quad 1 \leq A \leq k \quad (1.30)$$

y a partir de ellas las  $k$  2-formas diferenciales

$$\omega_L^A = -d\theta_L^A, \quad 1 \leq A \leq k \quad (1.31)$$

a las que llamaremos **formas lagrangianas** en  $T_k^1 Q$ .

En un sistema local de coordenadas  $(q^i, v_A^i)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$  de (1.25) y (1.30) se obtiene

$$\theta_L^A = \frac{\partial L}{\partial v_A^i} dq^i, \quad 1 \leq A \leq k \quad (1.32)$$

y así de (1.31) y (1.32) obtenemos

$$\omega_L^A = dq^i \wedge d \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} dq^i \wedge dv_B^j. \quad (1.33)$$

Las formas lagrangianas que se acaban de introducir están relacionadas con las formas canónicas  $\theta^A, \omega^A, 1 \leq A \leq k$  de  $(T_k^1)^* Q$  (definidas en (1.1) y (1.2) respectivamente), mediante la aplicación de Legendre asociada a la función lagrangiana  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 1.33** Dada una función lagrangiana  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ , la **aplicación de Legendre**  $FL : T_k^1 Q \rightarrow (T_k^1)^* Q$  se define como sigue:

$$FL(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = ([FL(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})]^1, \dots, [FL(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})]^k)$$

donde

$$[FL(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})]^A(u_{\mathbf{q}}) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{A\mathbf{q}} + su_{\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}),$$

para cada  $A = 1, \dots, k$  y  $u_{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}} Q$ .

La expresión local de  $FL$  es

$$FL : (q^i, v_A^i) \longrightarrow (q^i, \frac{\partial L}{\partial v_A^i}). \quad (1.34)$$

De las expresiones locales (1.3), (1.32) y (1.33) de  $\theta^A$ ,  $\omega^A$ ,  $\theta_L^A$  y  $\omega_L^A$  se obtienen las siguientes identidades que relacionan las formas canónicas en  $(T_k^1)^* Q$  con las formas lagrangianas definidas en  $T_k^1 Q$ :

$$\theta_L^A = FL^* \theta^A, \quad \omega_L^A = FL^* \omega^A, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (1.35)$$

F. Estructura  $k$ -simplética en  $T_k^1 Q$ .

Las 2-formas diferenciales  $\omega_L^1, \dots, \omega_L^k$ , que acabamos de introducir, junto con la distribución vertical  $V = \ker T(\tau_Q^k)$ , determinada por el fibrado  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$ , constituirán una estructura  $k$ -simplética sobre el fibrado  $T_k^1 Q$  si añadimos alguna condición de regularidad sobre la función lagrangiana  $L$ .

**Definición 1.34** Una función lagrangiana  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **regular** (resp. **hiperregular**) si la correspondiente aplicación de Legendre  $FL$  es un difeomorfismo local (resp. global). En otro caso  $L$  se dice **singular**.

De la expresión local de  $FL$ , (1.34), obtenemos que  $L$  es regular si, y sólo si, la matriz  $\left( \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j} \right)$  es no singular.

La condición de regularidad impuesta sobre un lagrangiano  $L$  nos permite definir una estructura  $k$ -simplética en  $T_k^1 Q$ , tal y como se recoge en la siguiente proposición que aparece demostrada en [107]:

**Proposición 1.35** *Las siguientes condiciones son equivalentes: (i)  $L$  es regular, (ii)  $FL$  es un difeomorfismo local, (iii)  $(\omega_L^A, V; 1 \leq A \leq k)$  es una estructura  $k$ -simpléctica en  $T_k^1 Q$ , siendo*

$$V = \ker T \tau_Q^k = \left\langle \frac{\partial}{\partial v_1^i}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_k^i} \right\rangle_{i=1, \dots, n}$$

la distribución vertical del fibrado  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$ .

**Observación 1.36** En [107] los autores también demuestran que la condición de regularidad del lagrangiano  $L$  es equivalente a que  $(\omega_L^1, \dots, \omega_L^k)$  define una forma polisimpléctica.

◇

### 1.2.2. Levantamiento de aplicaciones y campos de vectores.

El motivo de dedicar una subsección al levantamiento de aplicaciones y campos de vectores es porque los contenidos de la misma, en especial la primera definición son fundamentales a lo largo de toda la memoria.

**Definición 1.37** *Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación entre dos variedades diferenciables  $M$  y  $N$ . Se define la **prolongación o levantamiento canónico***

$$T_k^1 f : T_k^1 M \rightarrow T_k^1 N$$

como sigue

$$T_k^1 f(j_{0,x}^1 \phi) = j_{0,f(x)}^1 (f \circ \phi), \text{ para todo } x \in M, \phi : \mathbb{R}^k \rightarrow M, \phi(0) = x,$$

o equivalentemente por

$$T_k^1 f(v_{1x}, \dots, v_{kx}) = (T_x f(v_{1x}), \dots, T_x f(v_{kx})), \quad (1.36)$$

en donde  $v_{1x}, \dots, v_{kx} \in T_x M$ ,  $x \in M$ , y  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  es la aplicación tangente inducida por  $f$ .

**Definición 1.38** *Sea  $Z \in \mathfrak{X}(Q)$  un campo de vectores en  $Q$  con grupo local 1-paramétrico de transformaciones  $\{h_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ . Se define el **levantamiento completo** de  $Z$  a  $T_k^1 Q$  como el campo de vectores  $Z^C$  en  $T_k^1 Q$  que tiene como grupo 1-paramétrico de transformaciones la familia  $\{T_k^1(h_s)\}_{s \in \mathbb{R}}$ .*

En coordenadas canónicas, si  $Z = Z^i \frac{\partial}{\partial q^i}$  entonces la expresión local de  $Z^C$  es:

$$Z^C = Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} + v_A^j \frac{\partial Z^k}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial v_A^k}. \quad (1.37)$$

El siguiente resultado pone de manifiesto que el levantamiento canónico de aplicaciones al fibrado tangente de  $k^1$ -velocidades preserva las estructuras canónicas de  $T_k^1Q$ .

**Lema 1.39** Sea  $\Phi = T_k^1\varphi : T_k^1Q \rightarrow T_k^1Q$  la prolongación canónica de un difeomorfismo  $\varphi : Q \rightarrow Q$ . Entonces

$$(a) \quad T\Phi \circ J^A = J^A \circ T\Phi, \quad (b) \quad T\Phi(\Delta_A) = \Delta_A, \quad (c) \quad T\Phi(\Delta) = \Delta.$$

*Demostración:*

(a) Es una consecuencia directa de la expresión local (1.25) de  $J^A$  y la expresión local de  $T_k^1\varphi$  dada por  $T_k^1\varphi(q^i, v_A^i) = (\varphi^j(q^i), v_A^i \frac{\partial \varphi^j}{\partial q^i})$  donde las funciones  $\varphi^j$  denotan las componentes del difeomorfismo  $\varphi : Q \rightarrow Q$ .

(b) Es una consecuencia de la conmutatividad  $T_k^1\varphi \circ \psi_{\mathbf{t}}^A = \psi_{\mathbf{t}}^A \circ T_k^1\varphi$ , donde  $\psi_{\mathbf{t}}^A$  son los grupos locales 1-paramétricos de difeomorfismos (1.28) generados por  $\Delta_A$ .

(c) Es una consecuencia directa de (b) y de ser  $\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_k$ .

□

### 1.2.3. Campos de $k$ -vectores y SOPDE's en $T_k^1Q$ .

En el desarrollo del formalismo lagrangiano  $k$ -simplético aparecen ciertas ecuaciones en derivadas parciales (EDP's) de segundo orden definidas en  $T_k^1Q$ . Estas EDP's aparecen asociadas a ciertos campos de  $k$ -vectores, que denominaremos SOPDE's, (abreviatura del inglés *second order partial differential equations*). En esta sección vamos a recordar cuáles son los campos de  $k$ -vectores que dan lugar a ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden y daremos una caracterización de los mismos en términos de la estructura  $k$ -tangente canónica y los campos de vectores canónicos  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ .

**Definición 1.40** Un campo de  $k$ -vectores  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  en  $T_k^1 Q$ , se dice que es una **ecuación en derivadas parciales de segundo orden (SOPDE)** si es una sección del fibrado vectorial  $T_k^1 \tau_Q^k : T_k^1(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q$ ; esto es,

$$T_k^1 \tau_Q^k \circ (X_1, \dots, X_k) = id_{T_k^1 Q} \quad ,$$

es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_k^1 Q & & \\ \mathbf{X} \downarrow & \searrow id_{T_k^1 Q} & \\ T_k^1(T_k^1 Q) & \xrightarrow{T_k^1 \tau_Q^k} & T_k^1 Q \end{array}$$

o equivalentemente

$$(\tau_Q^k)_*(w_{\mathbf{q}})(X_A(w_{\mathbf{q}})) = v_{A\mathbf{q}} \quad , \quad A = 1, \dots, k \quad ,$$

en donde  $w_{\mathbf{q}} = (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) \in T_k^1 Q$ .

En el caso particular  $k = 1$  esta definición coincide con la definición de SODE (ecuación diferencial de segundo orden).

Sean  $(q^i)_{1 \leq i \leq n}$  un sistema local de coordenadas en  $Q$  y  $(q^i, v_A^i)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$  las coordenadas inducidas en  $T_k^1 Q$ . Por un cálculo directo en coordenadas locales obtenemos que la expresión local de un SOPDE  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  es

$$X_A = v_A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_A)^i_B \frac{\partial}{\partial v_B^i}, \quad 1 \leq A \leq k \quad , \quad (1.38)$$

en donde  $(X_A)^i_B$  son funciones en  $T_k^1 Q$ .

Los SOPDE's en  $T_k^1 Q$  se pueden caracterizar a partir de la estructura  $k$ -tangente  $J^1, \dots, J^k$  y los campos de vectores canónicos  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  como se pone de manifiesto en la siguiente proposición, la cual es una consecuencia inmediata de (1.38):

**Proposición 1.41** Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  un campo de  $k$ -vectores en  $T_k^1 Q$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1)  $\mathbf{X}$  es un SOPDE.



$$(2) \quad J^A(X_A) = \Delta_A, \quad 1 \leq A \leq k.$$

A continuación vamos a caracterizar las secciones integrales de un SOPDE.

Sea  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1Q$ , dada por  $\psi(\mathbf{t}) = (\psi^i(\mathbf{t}), \psi_B^i(\mathbf{t}))$ , una sección integral del SOPDE  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ . Teniendo en cuenta la expresión local de un SOPDE (1.38) y reescribiendo la condición de sección integral (1.11) para este caso concreto, obtenemos que  $\psi$  es sección integral de  $\mathbf{X}$  si, y sólo si, satisface el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\left. \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} = v_A^i(\psi(\mathbf{t})) = \psi_A^i(\mathbf{t}), \quad \left. \frac{\partial \psi_B^i}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} = (X_A)_B^i(\psi(\mathbf{t})). \quad (1.39)$$

De las expresiones (1.10) y (1.39) obtenemos la siguiente proposición.

**Proposición 1.42** *Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  un SOPDE integrable.*

- (1) *Si  $\psi$  es una sección integral de  $\mathbf{X}$  entonces  $\psi = \phi^{(1)}$ , donde  $\phi^{(1)}: \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1Q$  es la primera prolongación de la aplicación*

$$\phi := \tau_Q^k \circ \psi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\psi} T_k^1Q \xrightarrow{\tau_Q^k} Q.$$

*Además la aplicación  $\phi(\mathbf{t}) = (\psi^i(\mathbf{t}))$  será solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden*

$$\left. \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^A \partial t^B} \right|_{\mathbf{t}} = (X_A)_B^i(\psi^i(\mathbf{t}), \frac{\partial \psi^i}{\partial t^C}(\mathbf{t})) \quad 1 \leq i \leq n; 1 \leq A, B \leq k. \quad (1.40)$$

- (2) *Recíprocamente, si  $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow Q$ , localmente dada por  $\phi(\mathbf{t}) = (\psi^i(\mathbf{t}))$ , es cualquier aplicación verificando (1.40) entonces  $\phi^{(1)}$  es una sección integral de  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ .*

□

**Observación 1.43** La ecuación (1.40) nos permite afirmar que cuando el SOPDE  $\mathbf{X}$  es integrable entonces  $(X_A)_B^i = (X_B)_A^i$  para todo  $A, B = 1, \dots, k$ .

◇

### 1.2.4. Formalismo lagrangiano. Ecuaciones de Euler - Lagrange.

A lo largo de esta subsección vamos a recordar el formalismo lagrangiano  $k$ -simpléctico de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange.

En primer lugar consideraremos un ejemplo particular de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange. A continuación describiremos como deducir, desde un punto de vista formal, estas ecuaciones a partir de un principio variacional y terminamos esta subsección con una descripción geométrica de dichas ecuaciones.

**A. Ejemplo: la cuerda vibrante.**

Consideremos una cuerda de longitud finita, cuya longitud designaremos por  $L$ , sujeta por sus extremos y sobre la que no actúa ninguna fuerza externa.

Si las constantes  $\sigma$  y  $\tau$  representan respectivamente la masa por unidad de longitud y el módulo de Young del sistema, dado por la constante de proporcionalidad entre el alargamiento de la cuerda y la fuerza o tensión ejercida sobre ella, entonces se deduce, véase [44], que las ecuaciones del movimiento son

$$\sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^1)^2} - \tau \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^2)^2} = 0, \quad (1.41)$$

de modo que las soluciones son aplicaciones

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t^1, t^2) &\longrightarrow \phi(t^1, t^2) \end{aligned}$$

que describen el desplazamiento de cada punto de la cuerda en función del tiempo  $t^1$  y de la posición  $x = t^2$ .

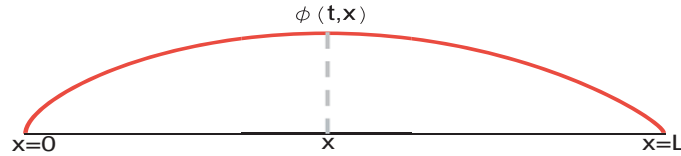


Figura 1.1: *Cuerda vibrante*

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar como un ejemplo de ecuaciones de campo de Euler-Lagrange asociadas a una función lagrangiana  $L$  definida sobre el fibrado  $T_2^1 Q$ , para cierta variedad  $Q$ .

Si definimos

$$L(q, v_1, v_2) = \frac{1}{2}(\sigma v_1^2 - \tau v_2^2),$$

donde  $q$  representa la variable  $\phi$  y  $v_A$  representa la variable  $\partial\phi/\partial t^A$ . Entonces

$$\frac{\partial L}{\partial v_1} = \sigma v_1, \quad \frac{\partial L}{\partial v_2} = -\tau v_2, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Evaluando en  $\phi^{(1)}(\mathbf{t}) = (\phi(\mathbf{t}), \frac{\partial\phi}{\partial t^1}\big|_{\mathbf{t}}, \frac{\partial\phi}{\partial t^2}\big|_{\mathbf{t}})$  se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial v_1}\bigg|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} = \sigma \frac{\partial\phi}{\partial t^1}\bigg|_{\mathbf{t}}, \quad \frac{\partial L}{\partial v_2}\bigg|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} = -\tau \frac{\partial\phi}{\partial t^2}\bigg|_{\mathbf{t}}, \quad \frac{\partial L}{\partial q}\bigg|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} = 0.$$

Por lo tanto se tiene

$$\sum_{A=1}^2 \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A}\bigg|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) = \sigma \frac{\partial^2\phi}{\partial (t^1)^2}\bigg|_{\mathbf{t}} - \tau \frac{\partial^2\phi}{\partial (t^2)^2}\bigg|_{\mathbf{t}},$$

así las ecuaciones del movimiento (1.41) se pueden escribir como sigue

$$\sum_{A=1}^2 \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A}\bigg|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}\bigg|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})}.$$

Así la ecuación de onda en dimensión 1, ecuación (1.41), es un ejemplo de las denominadas ecuaciones de campo de Euler-Lagrange.

En general, consideremos un campo definido por una función  $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow Q$ , cuya expresión local es  $\phi(t^1, \dots, t^k) = (\phi^1(t^1, \dots, t^k), \dots, \phi^k(t^1, \dots, t^k))$ . Una función lagrangiana  $L$  es una función  $\mathbb{R}$ -valuada  $L(\phi^i(\mathbf{t}), \partial\phi^i/\partial t^A(\mathbf{t}))$  que depende de las variables-componentes del campo  $q^i = \phi^i$  y de las derivadas parciales del campo  $\partial\phi^i/\partial t^A(\mathbf{t})$ . Por tanto podemos considerar la función  $L$  como una función definida en  $T_k^1 Q$  y así  $L: T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ .

Las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange para una función lagrangiana  $L$  con solución  $\phi(\mathbf{t}) = (\phi^i(t^1, \dots, t^k))$  es el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden dado por

$$\sum_{A=1}^k \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i}\bigg|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial\phi^j}{\partial t^A}\bigg|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i}\bigg|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2\phi^j}{\partial t^A \partial t^B}\bigg|_{\mathbf{t}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}\bigg|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})},$$

donde  $1 \leq i \leq n$  y  $\phi^{(1)}(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t}), \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}})$ , es la primera prolongación del campo  $\phi$ . Estas ecuaciones se escriben habitualmente como sigue:

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})}, \quad v_A^i(\phi^{(1)}(\mathbf{t})) = \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}. \quad (1.42)$$

**Observación 1.44** Observe que teniendo en cuenta la expresión local (1.10) de la primera prolongación  $\phi^{(1)}$  de  $\phi$ , el segundo grupo de ecuaciones de (1.42) se transforma en un conjunto de identidades.

◇

**B. Principio variacional.**

En este apartado veremos como obtener las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange a partir de un principio variacional.

**Definición 1.45** Denotemos por  $\mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^k, Q)$  el conjunto de aplicaciones

$$\phi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q,$$

con soporte compacto, definidas en un conjunto abierto  $U_0$ . Sea  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano, se define la acción asociada a  $L$  por

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^k, Q) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto \mathcal{J}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^k} (L \circ \phi^{(1)})(\mathbf{t}) d^k \mathbf{t}, \end{aligned}$$

en donde  $d^k \mathbf{t} = dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k$  es una forma de volumen en  $\mathbb{R}^k$  y  $\phi^{(1)} : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$  denota la primera prolongación de  $\phi$ .

**Definición 1.46** Una aplicación  $\phi : U_0 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow Q$ , perteneciente al conjunto  $\mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^k, Q)$ , es un extremal de  $\mathcal{J}$  si

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathcal{J}(\tau_s \circ \phi) = 0$$

para cada flujo  $\tau_s$  en  $Q$  tal que  $\tau_s(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$  para todo  $\mathbf{q}$  de la frontera de  $\phi(U_0) \subset Q$ .

Obsérvese que los flujos  $\tau_s : Q \rightarrow Q$  considerados en la definición anterior están generados por campos de vectores en  $Q$  que se anulan en la frontera de  $\phi(U_0)$ .

El problema variacional, asociado a un lagrangiano  $L$ , consiste en encontrar los extremales de la acción integral  $\mathcal{J}$ .

En la siguiente proposición caracterizaremos los extremales de la acción  $\mathcal{J}$  asociada a un lagrangiano  $L$ .

**Proposición 1.47** Sean  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función lagrangiana y  $\phi \in \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^k, Q)$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $\phi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es un extremal del problema variacional asociado a  $L$ .
- (2) Para cada campo de vectores  $Z$  en  $Q$ , que se anula en los puntos de la frontera de  $\phi(U_0)$ , se verifica:

$$\int_{U_0} ((\mathcal{L}_{Z^C} L) \circ \phi^{(1)})(\mathbf{t}) d^k \mathbf{t} = 0,$$

donde  $Z^C$  es el levantamiento completo de  $Z$  a  $T_k^1 Q$ .

- (3)  $\phi$  es solución de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (1.42).

*Demostración:*

(1  $\Leftrightarrow$  2) Sea  $Z \in \mathfrak{X}(Q)$  un campo de vectores en  $Q$ , con grupo uniparamétrico  $\tau_s$  y que se anula en la frontera de  $\phi(U_0)$ .

Recordemos que el flujo asociado a  $Z^C$  es  $T_k^1 \tau_s$ .

Puesto que  $T_k^1 \tau_s \circ \phi^{(1)} = (\tau_s \circ \phi)^{(1)}$ , entonces se verifica

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathcal{J}(\tau_s \circ \phi) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{\mathbb{R}^k} (L \circ (\tau_s \circ \phi)^{(1)})(\mathbf{t}) d^k \mathbf{t} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left( \int_{\mathbb{R}^k} (L \circ (\tau_s \circ \phi)^{(1)})(\mathbf{t}) d^k \mathbf{t} - \int_{\mathbb{R}^k} (L \circ \tau_0 \circ \phi^{(1)})(\mathbf{t}) d^k \mathbf{t} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left( \int_{\mathbb{R}^k} (L \circ T_k^1 \tau_s \circ \phi^{(1)})(\mathbf{t}) d^k \mathbf{t} - \int_{\mathbb{R}^k} (L \circ \phi^{(1)})(\mathbf{t}) d^k \mathbf{t} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \left( \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left( L(T_k^1 \tau_s \circ \phi^{(1)}(\mathbf{t})) - L(\phi^{(1)}(\mathbf{t})) \right) \right) d^k \mathbf{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} ((\mathcal{L}_{Z^C} L) \circ \phi^{(1)})(\mathbf{t}) d^k \mathbf{t}, \end{aligned}$$

con lo que el resultado buscado se sigue inmediatamente.

(2  $\Leftrightarrow$  3) Acabamos de probar que  $\phi: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es un extremal de  $\mathcal{J}$  si, y sólo si, para cada campo de vectores  $Z \in \mathfrak{X}(Q)$  que se anule en la frontera de  $\phi(U_0)$  se verifica

$$\int_{U_0} ((\mathcal{L}_{Z^C} L) \circ \phi^{(1)}) (\mathbf{t}) d^k \mathbf{t} = 0. \quad (1.43)$$

Consideremos un sistema local de coordenadas tal que  $Z = Z^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ , teniendo en cuenta la expresión (1.37) para el levantamiento completo  $Z^C$  e integrando por partes deducimos que  $\phi(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t}))$  es un extremal de  $\mathcal{J}$  si, y sólo si,

$$\int_{U_0} \left[ \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right] (Z^i \circ \phi)(\mathbf{t}) d^k \mathbf{t} = 0,$$

para todo valor de  $Z^i$ . Así,  $\phi$  será un extremal de  $\mathcal{J}$  si, y sólo si,

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})}. \quad (1.44)$$

Las ecuaciones (1.44) se llaman **ecuaciones de campo de Euler-Lagrange** para  $L$ .

□

### C. Versión geométrica de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange.

A continuación daremos una descripción geométrica de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (1.44) y veremos que las soluciones de estas ecuaciones son secciones integrales de ciertos campos de  $k$ -vectores en  $T_k^1 Q$ .

De modo análogo a lo que ocurría en el caso hamiltoniano consideremos la ecuación

$$\sum_{A=1}^k \imath_{X_L^A} \omega_L^A = dE_L, \quad (1.45)$$

donde  $E_L = \Delta(L) - L$  es la energía lagrangiana. Nos referiremos a esta ecuación como **ecuación geométrica de Euler-Lagrange**, este nombre quedará justificado tras el enunciado del teorema 1.48.

Denotamos por  $\mathfrak{X}_L^k(T_k^1Q)$  el conjunto de campos de  $k$ -vectores  $\mathbf{X}_L = (X_L^1, \dots, X_L^k)$  en  $T_k^1Q$  los cuales son solución de (1.45). A los elementos de este conjunto los denominaremos **campos de  $k$ -vectores lagrangianos**.

Si cada  $X_L^A$  está localmente dado por

$$X_L^A = (X_L^A)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_L^A)_B^i \frac{\partial}{\partial v_B^i}, \quad 1 \leq A \leq k$$

entonces  $(X_L^1, \dots, X_L^k)$  es una solución a (1.45) si, y sólo si, las funciones  $(X_L^A)^i$  y  $(X_L^A)_B^i$  satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_A^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \right) (X_L^A)^j - \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j} (X_L^A)_B^j &= v_A^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_A^j} - \frac{\partial L}{\partial q^i}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} (X_L^A)^i &= \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} v_A^i. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Si el lagrangiano es regular, las anteriores ecuaciones son equivalentes a las siguientes

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} v_A^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j} (X_L^A)_B^j = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad (X_L^A)^i = v_A^i. \quad (1.47)$$

Por lo tanto cuando  $L$  es regular  $X_L^A$  tiene la siguiente expresión local:

$$X_L^A = v_A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_L^A)_B^i \frac{\partial}{\partial v_B^i}$$

esto es,  $\mathbf{X}_L = (X_L^1, \dots, X_L^k)$  es un SOPDE en  $T_k^1Q$ .

Como consecuencia de los cálculos anteriores podemos enunciar el siguiente teorema:

**Teorema 1.48** *Sea  $L : T_k^1Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función lagrangiana y  $\mathbf{X}_L = (X_L^1, \dots, X_L^k)$  un campo de  $k$ -vectores en  $T_k^1Q$  tal que*

$$\sum_{A=1}^k \iota_{X_L^A} \omega_L^A = dE_L,$$

en donde  $E_L = \Delta(L) - L$ . Entonces,

(1) Si  $L$  es regular entonces  $\mathbf{X}_L = (X_L^1, \dots, X_L^k)$  es un SOPDE.

Además si  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$  es un sección integral de  $\mathbf{X}_L$ , entonces la aplicación

$$\phi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\psi} T_k^1 Q \xrightarrow{\tau_Q^k} Q$$

es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.44).

(2) Si  $\mathbf{X}_L = (X_L^1, \dots, X_L^k)$  es integrable y  $\phi^{(1)} : \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$  es una sección integral de  $\mathbf{X}$  entonces  $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.44).

*Demostración:*

(1) es una consecuencia inmediata de (1.47) y la Proposición 1.42.

(2) Sea  $\phi^{(1)}$  una sección integral de  $\mathbf{X}_L$ .

De la primera ecuación de (1.46) y de la expresión local (1.9) de  $\phi^{(1)}$  se deduce que  $\phi$  es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.44).

□

**Observación 1.49** Si el lagrangiano  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  es regular, entonces  $(\omega_L^A, V)$  es una estructura  $k$ -simpléctica en  $T_k^1 Q$ . Por este motivo la ecuación (1.45) puede considerarse como un caso particular de (1.15) para esta estructura  $k$ -simpléctica y con  $H = E_L$ .

De modo análogo a lo que hicimos en la definición 1.22, a la familia  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$  le llamaremos **sistema lagrangiano  $k$ -simpléctico**.

◇

**Observación 1.50** Si reescribimos la ecuación (1.45) para el caso  $k = 1$ , obtenemos

$$\iota_X \omega_L = dE_L$$

que es la ecuación de la formulación geométrica de la Mecánica lagrangiana.

◇



**Ejemplos.-** Veamos ahora algunos ejemplos de ecuaciones de campo que se pueden describir con el formalismo aquí desarrollado.

Los cuatro ejemplos que presentamos corresponden al caso  $k = 2$ . La ecuación geométrica de Euler-Lagrange (1.45) se escribe como sigue:

$$i_{X_1}\omega_L^1 + i_{X_2}\omega_L^2 = dE_L. \quad (1.48)$$

**Ecuación de onda.** En este caso  $Q = \mathbb{R}$  y el lagrangiano es

$$\begin{aligned} L: T_2^1\mathbb{R} \equiv T\mathbb{R} \oplus T\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, v_1, v_2) &\mapsto \frac{1}{2}(\sigma v_1^2 - \tau v_2^2) \end{aligned}$$

entonces:

Si la primera prolongación  $\phi^{(1)}$  de  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una sección integral de  $(X_1, X_2)$ , solución de la ecuación (1.48), entonces  $\phi$  es solución de la ecuación de onda (1.41).

**Ecuación de Laplace.** Consideramos ahora el lagrangiano

$$\begin{aligned} L: T_2^1\mathbb{R} \equiv T\mathbb{R} \oplus T\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, v_1, v_2) &\mapsto \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2). \end{aligned}$$

Si la primera prolongación  $\phi^{(1)}$  de  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una sección integral de  $(X_1, X_2)$  entonces  $\phi$  es solución de la ecuación de Laplace, esto es:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^1)^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^2)^2} = 0.$$

**Ecuación de superficies minimales.** Ahora  $Q = \mathbb{R}$  y el lagrangiano es

$$\begin{aligned} L: T\mathbb{R} \oplus T\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, v_1, v_2) &\mapsto \sqrt{1 + v_1^2 + v_2^2} \end{aligned}$$

De nuevo, si la primera prolongación  $\phi^{(1)}$  de  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow Q$  es una sección integral de  $(X_1, X_2)$ , entonces  $\phi$  es solución de la ecuación de superficies minimales, esto es:

$$0 = (1 + (\frac{\partial \phi}{\partial t^2})^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^1)^2} - 2 \frac{\partial \phi}{\partial t^1} \frac{\partial \phi}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^1 \partial t^2} + (1 + (\frac{\partial \phi}{\partial t^1})^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^2)^2}.$$

**Ecuación de Navier.** En este caso  $Q = \mathbb{R}^2$  y el lagrangiano viene dado por:

$$\begin{aligned} L: \quad T\mathbb{R}^2 \oplus T\mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q^1, q^2, v_1^1, v_1^2, v_2^1, v_2^2) &\mapsto \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu\right)[(v_1^1)^2 + (v_2^2)^2] + \frac{1}{2}\mu[(v_2^1)^2 + (v_1^2)^2] + (\lambda + \mu)v_1^1 v_2^2 \end{aligned}$$

Si la primera prolongación  $\phi^{(1)}$  de

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t = (t^1, t^2) &\mapsto (\phi^1(t), \phi^2(t)) \end{aligned}$$

es una sección integral de  $(X_1, X_2)$ , solución de (1.48), entonces  $\phi$  es solución de las ecuaciones de Navier, esto es:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \phi^1}{\partial (t^1)^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial t^1 \partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 \phi^1}{\partial (t^2)^2} &= 0, \\ \mu \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial (t^1)^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \phi^1}{\partial t^2 \partial t^1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial (t^2)^2} &= 0. \end{aligned}$$

### 1.3. Equivalencia entre las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana.

En esta sección vamos a recordar la equivalencia que existe entre el formalismo  $k$ -simpléctico lagrangiano y hamiltoniano.

Consideramos una función lagrangiana hiperregular  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ . En este caso sabemos que la aplicación de Legendre  $FL$  es un difeomorfismo global. Esto nos permite definir una función hamiltoniana  $H : (T_k^1)^* Q \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$H = E_L \circ FL^{-1}$$

donde  $FL^{-1}$  es la inversa de  $FL$ .

En estas condiciones se puede demostrar el siguiente resultado, que establece la equivalencia entre la formulación lagrangiana y la hamiltoniana.

**Teorema 1.51**

- (1) Si  $\mathbf{X}_L = (X_L^1, \dots, X_L^k)$  es una solución de la ecuación geométrica de Euler-Lagrange (1.45), entonces  $\mathbf{X}_H = (X_H^1, \dots, X_H^k)$ , donde  $X_H^A = FL_*(X_L^A)$ ,  $1 \leq A \leq k$ , es una solución de la ecuación geométrica hamiltoniana (1.15) en  $(T_k^1)^*Q$ , con  $H = E_L \circ FL^{-1}$ .
- (2) Si  $\mathbf{X}_L = (X_L^1, \dots, X_L^k)$  es integrable y  $\phi^{(1)}$  es una sección integral de  $\mathbf{X}_L$ , entonces  $\varphi = FL \circ \phi^{(1)}$  es una sección integral de  $\mathbf{X}_H = (X_H^1, \dots, X_H^k)$  y por lo tanto es una solución de las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl (1.13) con  $H = E_L \circ FL^{-1}$ .

*Demostración:*

La demostración detallada de este resultado puede encontrarse en [104].

□



## Capítulo 2

# Simetrías y Leyes de conservación

Este capítulo se dedica al estudio de simetrías, en el contexto  $k$ -simpléctico, de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (1.13) y de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (1.42).

Recordemos que una simetría de ecuaciones en derivadas parciales es un difeomorfismo que lleva soluciones de la ecuación en derivadas parciales en otras soluciones de la misma ecuación.

En particular, introduciremos las simetrías de Cartan a las que les asociaremos leyes de conservación, probando así una versión del Teorema de Noether.

Finalizamos este capítulo introduciendo el concepto de Lagrangianos equivalentes, como aquellos lagrangianos  $L$  y  $L'$  que verifican que las respectivas ecuaciones de Euler-Lagrange tienen las mismas soluciones.

Relacionado con el concepto de lagrangianos equivalentes, aparecen las simetrías gauge como aquellos difeomorfismos que llevan un lagrangiano en otro equivalente. En ciertos casos, las simetrías gauge se pueden relacionar con las simetrías de Cartan introducidas en la primera parte del capítulo.

### 2.1. Caso hamiltoniano.

A lo largo de esta sección vamos a considerar el sistema hamiltoniano  $k$ -simpléctico (véase definición 1.22)  $((T_k^1)^*Q, \omega^A, H)$ .

### 2.1.1. Simetrías y leyes de conservación.

La finalidad de esta subsección es definir los conceptos de simetrías y leyes de conservación de las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl (1.13).

Comenzamos introduciendo la noción de ley de conservación para el sistema hamiltoniano  $k$ -simplético  $((T_k^1)^*Q, \omega^A, H)$ . Siguiendo a Olver, véase [114], introducimos la siguiente definición :

**Definición 2.1** *Una ley de conservación (o una cantidad conservada) para las ecuaciones de campo de Hamilton-de Donder-Weyl (1.13) es una aplicación*

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k): (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}^k$$

*tal que la divergencia de*

$$\mathcal{F} \circ \psi = (\mathcal{F}^1 \circ \psi, \dots, \mathcal{F}^k \circ \psi): U_0 \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{\psi} (T_k^1)^*Q \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbb{R}^k$$

*es cero, para cada solución  $\psi$  de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (1.13), es decir,*

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial(\mathcal{F}^A \circ \psi)}{\partial t^A} = 0. \quad (2.1)$$

La siguiente proposición muestra una diferencia entre los resultados de la Mecánica Clásica y las Teorías de Campos  $k$ -simpléticos, (véase observación 2.3).

**Proposición 2.2** *Si  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k): (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una ley de conservación entonces para cada campo de  $k$ -vectores integrable  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  en  $\mathfrak{X}_H^k((T_k^1)^*Q)$ , se verifica*

$$\sum_{A=1}^k \mathcal{L}_{X_A} \mathcal{F}^A = 0. \quad (2.2)$$

*Demostración:*

Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}_H^k((T_k^1)^*Q)$  un campo de  $k$ -vectores hamiltoniano e integrable y  $\psi: U_0 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^*Q$  una sección integral of  $\mathbf{X}$  entonces:

- (1) Por la definición 1.17, de sección integral de un campo de  $k$ -vectores, para cada  $t \in U_0 \subseteq \mathbb{R}^k$  y  $A$  con  $A = 1, \dots, k$ , se verifica

$$X_A(\psi(t)) = \psi_*(t) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_t \right).$$

- (2)  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_H^k((T_k^1)^*Q)$ , esto es,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  es solución de las ecuaciones geométricas de Hamilton (1.15). Por lo tanto, aplicando el Teorema 1.23, se tiene que cada sección integral  $\psi$  de  $\mathbf{X}$  es solución de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (1.13).

De (1) y (2) se sigue la siguiente cadena de igualdades:

$$\sum_{A=1}^k \mathcal{L}_{X_A} \mathcal{F}^A = \sum_{A=1}^k \psi_*(t) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_t \right) (\mathcal{F}^A) = \sum_{A=1}^k \frac{\partial(\mathcal{F}^A \circ \psi)}{\partial t^A} \Big|_t = 0$$

donde la última igualdad es consecuencia de (2.1), lo que se satisface puesto que  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k)$  es una ley de conservación y  $\psi$  es una solución de las ecuaciones de Hamilton-de Donder-Weyl (1.13).

□

**Observación 2.3** El caso  $k = 1$  se corresponde con la Mecánica hamiltoniana Autónoma.

En este caso sabemos que  $\mathcal{F}$  es una constante del movimiento o integral primera si se mantiene constante a lo largo de las soluciones de las ecuaciones de Hamilton y, esto es equivalente a  $\mathcal{L}_{X_H} \mathcal{F} = 0$ , donde  $X_H$  es el campo de vectores Hamiltoniano definido por  $\iota_{X_H} \omega = dH$ .

En nuestro caso las ecuaciones (2.1) y (2.2) no son equivalentes puesto que no toda solución de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl es un sección integrable de algún campo de  $k$ -vectores perteneciente al conjunto  $\mathfrak{X}_H^k((T_k^1)^*Q)$ .

◇

A continuación introduciremos el concepto de simetría de un sistema Hamiltoniano  $k$ -simplectico como una simetría de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl.

**Definición 2.4**

- (1) Una **simetría del sistema hamiltoniano  $k$ -simpléctico**  $((T_k^1)^*Q, \omega^A, H)$  es un difeomorfismo

$$\Phi: (T_k^1)^*Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$$

tal que, para cada solución  $\psi: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^*Q$  de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (1.13), se tiene que  $\Phi \circ \psi$  es también una solución de dichas ecuaciones.

- (2) Una **simetría infinitesimal del sistema hamiltoniano  $k$ -simpléctico**  $((T_k^1)^*Q, \omega^A, H)$  es un campo de vectores  $Y \in \mathfrak{X}((T_k^1)^*Q)$  cuyos flujos son simetrías del sistema hamiltoniano  $k$ -simpléctico.

**Observación 2.5** En analogía con la Mecánica autónoma, a las simetrías  $\Phi$  que son levantamientos canónicos de difeomorfismos  $f: Q \rightarrow Q$ , esto es  $\Phi = (T_k^1)^*f$ , les denominaremos simetrías naturales. De modo análogo diremos que una simetría infinitesimal  $Y$ , de un sistema hamiltoniano  $k$ -simpléctico, es natural si  $Y = Z^{C*}$ , esto es,  $Y$  es el levantamiento completo a  $(T_k^1)^*Q$  de un campo de vectores  $Z$  en  $Q$ . A lo largo de esta memoria no emplearemos este tipo de simetrías.

◇

Una primera consecuencia directa de las definiciones 2.1 y 2.4, de ley de conservación y simetría de un sistema hamiltoniano  $k$ -simpléctico respectivamente, es la siguiente:

**Proposición 2.6** Sea  $\Phi: (T_k^1)^*Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$  una simetría de un sistema hamiltoniano  $k$ -simpléctico. Si  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k): (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una ley de conservación de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl, entonces  $\Phi^*\mathcal{F} = (\Phi^*\mathcal{F}^1, \dots, \Phi^*\mathcal{F}^k)$  también lo es.

*Demostración:*

Tenemos que probar que la divergencia de  $\Phi^*\mathcal{F} \circ \psi$  se anula para toda solución  $\psi$  de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (1.13). Ahora bien, teniendo en cuenta que  $\Phi^*\mathcal{F}(\psi(t)) = \mathcal{F}(\Phi(\psi(t)))$ ,  $t \in \mathbb{R}^k$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\psi} & (T_k^1)^*Q \\ & \searrow \mathcal{F} & \downarrow \Phi \\ & & (T_k^1)^*Q \end{array}$$



se verifica que

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial(\Phi^* \mathcal{F}^A \circ \psi)}{\partial t^A} = \sum_{A=1}^k \frac{\partial(\mathcal{F}^A \circ \Phi \circ \psi)}{\partial t^A} = 0$$

en donde en la última igualdad hemos utilizado que  $\mathcal{F}$  es ley de conservación y  $\Phi \circ \psi$  es solución de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (1.13), (esto último es consecuencia de ser  $\Phi$  simetría y  $\psi$  solución de las ecuaciones antes mencionadas).

□

Hay un tipo de simetrías que juegan un papel relevante como generadores de leyes de conservación, a continuación introduciremos este tipo de simetrías:

**Proposición 2.7** *Sea  $\Phi: (T_k^1)^*Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$  un difeomorfismo. Si*

$$\Phi^* \omega^A = \omega^A, \quad 1 \leq A \leq k \quad y \quad \Phi^* H = H \quad (\text{salvo constantes}).$$

*entonces  $\Phi$  es una simetría del sistema hamiltoniano  $k$ -simplético  $((T_k^1)^*Q, \omega^A, H)$ .*

*Demostración:*

A continuación mostraremos un esquema de la demostración que incluye los pasos a seguir. La demostración detallada se puede encontrar en el apéndice A.

Tenemos que probar lo siguiente:

*Si  $\psi: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^*Q$  es una solución de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (1.13), entonces  $\Phi \circ \psi$  también lo es, esto es,*

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(t)} &= - \sum_{A=1}^k \frac{\partial(p_i^A \circ \Phi \circ \psi)}{\partial t^A} \Big|_t, \\ (b) \quad \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(t)} &= \frac{\partial(q^i \circ \Phi \circ \psi)}{\partial t^A} \Big|_t. \end{aligned}$$

Consideremos un sistema local de coordenadas  $(q^i, p_i^A)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$  en  $(T_k^1)^*Q$  de modo que el difeomorfismo  $\Phi: (T_k^1)^*Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$  lo escribimos localmente como sigue:

$$\Phi(q^j, p_j^B) = (\Phi^i(q^j, p_j^B), \Phi_i^A(q^j, p_j^B)) \quad .$$

De la hipótesis  $\Phi^* \omega^A = \omega^A$ ,  $1 \leq A \leq k$ , deducimos las identidades

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \Big|_w \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^k} \Big|_w, \\ 0 &= \frac{\partial \Phi^i}{\partial p_j^B} \Big|_w \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial p_k^C} \Big|_w, \quad 1 \leq A \leq k, \\ \delta_j^k \delta_C^A &= \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \Big|_w \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial p_k^C} \Big|_w - \frac{\partial \Phi^i}{\partial p_k^C} \Big|_w \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \Big|_w. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Además, puesto que  $\Phi$  es un difeomorfismo,  $\Phi \circ \Phi^{-1} = id_{(T_k^1)^*Q}$ . Aplicando la regla de la cadena obtenemos:

$$\delta_k^i = \frac{\partial(\Phi \circ \Phi^{-1})^i}{\partial q^k} \Big|_w = \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})^j}{\partial q^k} \Big|_w + \frac{\partial \Phi^i}{\partial p_j^A} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})_j^A}{\partial q^k} \Big|_w, \quad (2.4)$$

$$0 = \frac{\partial(\Phi \circ \Phi^{-1})^i}{\partial p_k^B} \Big|_w = \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})^j}{\partial p_k^B} \Big|_w + \frac{\partial \Phi^i}{\partial p_j^A} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})_j^A}{\partial p_k^B} \Big|_w,$$

$$0 = \frac{\partial(\Phi \circ \Phi^{-1})_i^A}{\partial q^j} \Big|_w = \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^k} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial q^j} \Big|_w + \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial p_k^B} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})_k^B}{\partial q^j} \Big|_w, \quad (2.5)$$

$$\delta_j^i \delta_C^A = \frac{\partial(\Phi \circ \Phi^{-1})_i^A}{\partial p_j^C} \Big|_w = \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^k} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial p_j^C} \Big|_w + \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial p_k^B} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})_k^B}{\partial p_j^C} \Big|_w. \quad (2.6)$$

De las ecuaciones (2.3-2.6) obtenemos

$$\frac{\partial \Phi^s}{\partial q^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} = \delta_B^A \frac{\partial(\Phi^{-1})_j^A}{\partial p_s^B} \Big|_w, \quad \delta_D^A \frac{\partial \Phi^s}{\partial p_k^C} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} = -\delta_C^A \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial p_s^D} \Big|_w \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \Phi_s^A}{\partial q^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} = -\frac{\partial(\Phi^{-1})_j^A}{\partial q^s} \Big|_w, \quad \frac{\partial \Phi_s^A}{\partial p_k^C} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} = \delta_C^A \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial q^s} \Big|_w. \quad (2.8)$$

La condición  $\Phi^* H = H$  se escribe en coordenadas locales como sigue:

$$H(q^j, p_j^B) = (H \circ \Phi)(q^j, p_j^B) = H(\Phi^i(q^j, p_j^B), \Phi_i^A(q^j, p_j^B)),$$

y de aquí obtenemos que para cada  $w \in (T_k^1)^*Q$  se verifica

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_w &= \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \Big|_w + \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \Big|_w \\ \frac{\partial H}{\partial p_j^A} \Big|_w &= \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^i}{\partial p_j^A} \Big|_w + \frac{\partial H}{\partial p_i^B} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_i^B}{\partial p_j^A} \Big|_w \end{aligned} \quad (2.9)$$

Aplicando la regla de la cadena, por un cálculo directo uno prueba (a) como consecuencia de (1.13), (2.3), (2.4), (2.5), (2.8) y (2.9), y teniendo en cuenta (1.13), (2.7), (2.8) y (2.9), uno prueba (b).

□

**Observación 2.8** El caso  $k = 1$  se corresponde con la Mecánica Clásica hamiltoniana Autónoma. En este caso el anterior resultado puede encontrarse en [93].

◇

### 2.1.2. Simetrías de Cartan y Teorema de Noether.

La proposición anterior nos permite afirmar que un difeomorfismo

$$\Phi: (T_k^1)^*Q \rightarrow (T_k^1)^*Q,$$

que verifique ciertas condiciones, es una simetría del sistema hamiltoniano  $k$ -simplético  $((T_k^1)^*Q, \omega^A, H)$ . Las simetrías que verifican las condiciones del enunciado de la proposición anterior serán importantes a lo largo del capítulo ya que son las simetrías a las que les asociaremos leyes de conservación. Por ese motivo, introducimos un nombre particular (que aparece en la siguiente definición) para referirnos a este tipo de simetrías. Siguiendo la nomenclatura de la Mecánica introducimos las definiciones siguientes:

#### Definición 2.9

- (1) *Una **simetría de Cartan (o Noether)** de un sistema hamiltoniano  $k$ -simplético  $((T_k^1)^*Q, \omega^A, H)$  es un difeomorfismo  $\Phi: (T_k^1)^*Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$  tal que,*
  - a)  $\Phi^*\omega^A = \omega^A$ , para  $A = 1, \dots, k$ .
  - b)  $\Phi^*H = H$  (salvo constantes).
- (2) *Una **simetría de Cartan (o Noether) infinitesimal** es un campo de vectores  $Y \in \mathfrak{X}((T_k^1)^*Q)$  verificando :*
  - a)  $\mathcal{L}_Y\omega^A = 0$ , para  $A = 1, \dots, k$ .
  - b)  $\mathcal{L}_YH = 0$ .

Es inmediato a probar que, si  $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}((T_k^1)^*Q)$  son simetrías infinitesimales de Cartan, entonces  $[Y_1, Y_2]$  también lo es.

Además, se verifica el siguiente resultado que nos permite garantizar que una simetría de Cartan lleva soluciones de las ecuaciones geométricas de Hamilton (1.15) en otras soluciones de las mismas ecuaciones.

**Proposición 2.10** *Si  $\Phi: (T_k^1)^*Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$  es una simetría de Cartan de un sistema hamiltoniano  $k$ -simplético  $((T_k^1)^*Q, \omega^A, H)$ , y  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}_H^k((T_k^1)^*Q)$ , esto es,  $\mathbf{X}$  es solución de la ecuación geométrica de Hamilton (1.15), entonces  $\Phi_*\mathbf{X} = (\Phi_*X_1, \dots, \Phi_*X_k) \in \mathfrak{X}_H^k((T_k^1)^*Q)$ .*

*Demostración:*

Sea  $\Phi: (T_k^1)^*Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$  una simetría de Cartan.

Para cada  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}_H^k((T_k^1)^*Q)$  calculamos

$$\Phi^*[\sum_{A=1}^k \iota_{\Phi_*X_A} \omega^A - dH] = \sum_{A=1}^k \iota_{X_A} (\Phi^* \omega^A) - d(\Phi^* H) = \sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega^A - dH = 0$$

por tanto, como  $\Phi$  es un difeomorfismo, esto es equivalente a

$$\sum_{A=1}^k \iota_{\Phi_*X_A} \omega^A - dH = 0,$$

y por tanto  $\Phi_*\mathbf{X} = (\Phi_*X_1, \dots, \Phi_*X_k) \in \mathfrak{X}_H^k((T_k^1)^*Q)$ .

□

Para finalizar esta sección asociaremos a cada simetría de Cartan infinitesimal una ley de conservación.

**Proposición 2.11** *Sea  $Y \in \mathfrak{X}((T_k^1)^*Q)$  una simetría de Cartan infinitesimal de un sistema hamiltoniano  $k$ -simplético  $((T_k^1)^*Q, \omega^A, H)$ . Entonces, para  $A = 1, \dots, k$ , y para cada  $p \in (T_k^1)^*Q$ , existe un entorno abierto  $U_p$  del punto  $p$ , tal que:*

(1) *Existen  $k$  funciones, únicas salvo constantes,  $\mathcal{F}^A \in C^\infty(U_p)$ , tales que*

$$\iota_Y \omega^A = d\mathcal{F}^A, \quad 1 \leq A \leq k, \quad (\text{en } U_p). \quad (2.10)$$

(2) Existen  $k$  funciones  $\zeta^A \in C^\infty(U_p)$ , verificando  $\mathcal{L}_Y \theta^A = d\zeta^A$ , en  $U_p$ ; y entonces

$$\mathcal{F}^A = \iota_Y \theta^A - \zeta^A, \quad 1 \leq A \leq k, \quad (\text{salvo constantes, en } U_p). \quad (2.11)$$

*Demostración:*

(1) Es una consecuencia del Lema de Poincaré y la condición

$$0 = \mathcal{L}_Y \omega^A = \iota_Y d\omega^A + d\iota_Y \omega^A = d\iota_Y \omega^A.$$

(2) Teniendo en cuenta que  $\omega^A = -d\theta^A$ ,  $1 \leq A \leq k$  se verifica

$$d\mathcal{L}_Y \theta^A = \mathcal{L}_Y d\theta^A = -\mathcal{L}_Y \omega^A = 0, \quad 1 \leq A \leq k$$

y por tanto, para cada  $A$ ,  $\mathcal{L}_Y \theta^A$  es una forma cerrada. Así, por el Lema de Poincaré, existen  $\zeta^A \in C^\infty(U_p)$ , verificando que  $\mathcal{L}_Y \theta^A = d\zeta^A$ , en  $U_p$ . Además, de la identidad (2.10) se obtiene que en  $U_p$  se verifica

$$d\zeta^A = \mathcal{L}_Y \theta^A = d\iota_Y \theta^A + \iota_Y d\theta^A = d\iota_Y \theta^A - \iota_Y \omega^A = d\{\iota_Y \theta^A - \mathcal{F}^A\}$$

lo que prueba la identidad (2.11).

□

**Observación 2.12** En el caso particular de que una simetría de Cartan  $\Phi$  (resp. un simetría de Cartan infinitesimal  $Y$ ) verifique  $\Phi^* \theta^A = \theta^A$ ,  $1 \leq A \leq k$ , (resp.  $\mathcal{L}_Y \theta^A = 0$ ,  $1 \leq A \leq k$ ) entonces las funciones  $\zeta^A$  de la proposición anterior son constantes y por tanto

$$\mathcal{F}^A = -\iota_Y \theta^A, \quad 1 \leq A \leq k, \quad \text{salvo constantes.}$$

Este tipo particular de simetría de Cartan se denomina **estricta**.

◇

Finalmente, EL TEOREMA DE NOETHER CLÁSICO de la Mecánica hamiltoniana Autónoma (véase [93]) puede generalizarse al contexto  $k$ -simpléctico como sigue:

**Teorema 2.13** (Teorema de Noether): Sea  $Y \in \mathfrak{X}((T_k^1)^*Q)$  una simetría de Cartan infinitesimal de un sistema hamiltoniano  $k$ -simpléctico  $((T_k^1)^*Q, \omega^A, H)$ . Entonces, para cada  $p \in (T_k^1)^*Q$ , existe un entorno abierto  $U_p$ , del punto  $p$ , tal que las funciones

$$\mathcal{F}^A = \iota_Y \theta^A - \zeta^A, \quad 1 \leq A \leq k$$

(que hemos obtenido en la proposición anterior), definen una ley de conservación  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k)$ .

*Demostración:*

Sea  $Y \in \mathfrak{X}((T_k^1)^*Q)$  con expresión local  $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial q^i} + Y_i^A \frac{\partial}{\partial p_i^A}$ , entonces de (2.10) se obtiene

$$Y^i \delta_B^A = \frac{\partial f^A}{\partial p_i^B}, \quad -Y_i^A = \frac{\partial f^A}{\partial q^i} \quad ; \quad (\text{en } U_p)$$

Sea  $\psi: U_0 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^*Q$  una solución de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (1.13), entonces a partir de las identidades anteriores se sigue

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k \frac{\partial(\mathcal{F}^A \circ \psi)}{\partial t^A} \Big|_t &= \left( \frac{\partial \mathcal{F}^A}{\partial q^i} \Big|_{\psi(t)} \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_t + \frac{\partial \mathcal{F}^A}{\partial p_i^B} \Big|_{\psi(t)} \frac{\partial \psi_i^B}{\partial t^A} \Big|_t \right) \\ &= \left( -Y_i^A \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_t + Y^i \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_t \right) \\ &= - \left( Y_i^A \frac{\partial H}{\partial p_i^A} + Y^i \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \\ &= -\mathcal{L}_Y H = 0 \quad . \end{aligned}$$

□

**Observación 2.14** En el caso  $k = 1$ , el anterior teorema (Teorema de Noether en la Mecánica hamiltoniana Autónoma) puede encontrarse en [93].

◇

**Teorema 2.15** (Noether): Si  $Y \in \mathfrak{X}((T_k^1)^*Q)$  es una simetría de Cartan infinitesimal de un sistema hamiltoniano  $k$ -simplético  $((T_k^1)^*Q, \omega^A, H)$  entonces, para cada  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}_H^k((T_k^1)^*Q)$ , se tiene

$$\sum_{A=1}^k \mathcal{L}_{X_A} \mathcal{F}^A = 0 \quad (\text{en } U_p),$$

en donde las funciones  $\mathcal{F}^A$ ,  $1 \leq A \leq k$  se han definido en la Proposición 2.11.

*Demostración:*

Es consecuencia directa del Teorema de Noether 2.13 y de la Proposición 2.2 .

□

**Observación 2.16** En la Mecánica hamiltoniana Autónoma los teoremas 2.13 y 2.15 son equivalentes. En nuestro contexto esta equivalencia no se verifica ya que, como ya se comentó en la observación 2.3, no toda solución de las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl (1.13) es un sección integral de algún campo de  $k$ -vectores solución de la ecuación geométrica de Hamilton (1.15).

◇

## 2.2. Caso lagrangiano.

### 2.2.1. Simetrías y leyes de conservación

Cuando consideramos un lagrangiano regular, el sistema lagrangiano  $k$ -simplético  $(T_k^1Q, \omega_L^A, E_L)$  puede considerarse como un sistema hamiltoniano  $k$ -simplético con función hamiltoniana  $H = E_L$ . Naturalmente todas las definiciones y resultados de la sección anterior son aplicables en este caso. En particular, podemos definir:

**Definición 2.17** Una aplicación  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k): T_k^1Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una **ley de conservación** (o una **cantidad conservada**) para las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.44) si la divergencia de

$$\mathcal{F} \circ \phi^{(1)} = (\mathcal{F}^1 \circ \phi^{(1)}, \dots, \mathcal{F}^k \circ \phi^{(1)}): U_0 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

es cero, para cada  $\phi: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.44), esto es,

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial(\mathcal{F}^A \circ \phi^{(1)})}{\partial t^A} = 0. \quad (2.12)$$

Así, si  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k): T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una ley de conservación entonces, para cada campo de  $k$ -vectores integrable  $\mathbf{X}_L = (X_L^1, \dots, X_L^k)$  solución de la ecuación geométrica de Euler-Lagrange (1.45), se verifica

$$\sum_{A=1}^k \mathcal{L}_{X_L^A} \mathcal{F}^A = 0, \quad (2.13)$$

puesto que  $X_L^A(\phi^{(1)}(t)) = (\phi^{(1)})_*(t) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_t \right)$ ,  $1 \leq A \leq k$ .

**Observación 2.18** Al igual que en el caso hamiltoniano, véase la observación 2.3, una primera diferencia entre nuestro contexto y la Mecánica lagrangiana Autónoma es que en nuestro contexto las ecuaciones (2.12) y (2.13) no son equivalentes.

◇

### Definición 2.19

- (1) Una **simetría del sistema lagrangiano  $k$ -simpléctico**  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$  es un difeomorfismo

$$\Phi: T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$$

tal que, para cada solución  $\phi: U_0 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.44), se verifica que  $\Phi \circ \phi^{(1)} = \varphi^{(1)}$ , donde  $\varphi: U_0 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es también una solución de estas ecuaciones.

- (2) Una **simetría infinitesimal del sistema lagrangiano  $k$ -simpléctico**  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$  es un campo de vectores  $Y \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$  cuyos flujos locales son simetrías del sistema lagrangiano  $k$ -simpléctico.

De modo análogo al caso hamiltoniano, se verifica:



**Proposición 2.20** *Sea  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano regular y  $\Phi : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$  un difeomorfismo. Si  $\Phi$  verifica*

$$\Phi^* \omega_L^A = \omega_L^A, \quad 1 \leq A \leq k \quad \text{y} \quad \Phi^* E_L = E_L \quad (\text{salvo constantes}).$$

*entonces  $\Phi$  es una simetría del sistema lagrangiano  $k$ -simplético  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$ .*

*Demostración:*

Tenemos que probar:

*Si  $\phi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.44), entonces  $\Phi \circ \phi^{(1)} = \varphi^{(1)}$  siendo  $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$  también una solución de (1.44).*

Sin embargo, lo que vamos a probar aquí, teniendo en cuenta que  $L$  es regular, es la afirmación equivalente:

*$FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)} : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^* Q$  es una solución de las ecuaciones de Hamilton-de Donder-Weyl (1.13); esto es*

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})(t)} &= \frac{\partial (FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})^i}{\partial t^A} \Big|_t \\ (b) \quad \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})(t)} &= - \sum_{A=1}^k \frac{\partial (FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})_A^i}{\partial t^A} \Big|_t, \end{aligned} \quad (2.14)$$

en donde el hamiltoniano es  $H = E_L \circ FL^{-1}$ .

Al igual que en la demostración de la Proposición 2.7, aquí se incluye un esquema con los principales pasos de esta demostración, encontrando la demostración completa en el Apéndice A.

Consideramos un sistema local de coordenadas  $(q^i, v_A^i)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$  en  $T_k^1 Q$ , en el cual un difeomorfismo  $\Phi : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$  que verifique las hipótesis del enunciado lo escribimos como sigue:

$$\Phi(q^j, v_B^j) = (\Phi^i(q^j, v_B^j), \Phi_A^i(q^j, v_B^j)).$$

Con la finalidad de probar (2.14) haremos uso de cuatro grupos de identidades:

**1.** La hipótesis  $\Phi^*\omega_L^A = \omega_L^A$ ,  $1 \leq A \leq k$  nos proporciona el primer grupo de identidades : para cada  $w \in T_k^1Q$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_w &= \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^k}{\partial q^j} \Big|_w + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial q^j} \Big|_w \right) \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^i} \Big|_w, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_w &= \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^k}{\partial v_B^j} \Big|_w + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial v_B^j} \Big|_w \right) \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^i} \Big|_w \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^k}{\partial q^i} \Big|_w + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial q^i} \Big|_w \right) \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_B^j} \Big|_w, \quad (2.15) \\ 0 &= \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^k}{\partial v_B^j} \Big|_w + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial v_B^j} \Big|_w \right) \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_D^m} \Big|_w. \end{aligned}$$

**2.** Por ser  $\Phi$  un difeomorfismo existe  $\Phi^{-1}$  y verifica  $\Phi \circ \Phi^{-1} = id_{T_k^1Q}$ . Aplicando la regla de la cadena a esta igualdad, se obtiene el segundo grupo de identidades.

$$\delta_k^i = \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial (\Phi^{-1})^j}{\partial q^k} \Big|_w + \frac{\partial \Phi^i}{\partial v_A^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial (\Phi^{-1})_A^j}{\partial q^k} \Big|_w, \quad (2.16)$$

$$0 = \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial (\Phi^{-1})^j}{\partial v_B^k} \Big|_w + \frac{\partial \Phi^i}{\partial v_A^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial (\Phi^{-1})_A^j}{\partial v_B^k} \Big|_w, \quad (2.17)$$

$$0 = \frac{\partial \Phi_A^i}{\partial q^k} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial (\Phi^{-1})^k}{\partial q^j} \Big|_w + \frac{\partial \Phi_A^i}{\partial v_B^k} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial (\Phi^{-1})_B^k}{\partial q^j} \Big|_w. \quad (2.18)$$

**3.** El tercer grupo de identidades es una consecuencia del siguiente hecho: si  $\phi: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, sabemos que  $FL \circ \phi^{(1)}: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^*Q$  es una solución de las ecuaciones de Hamilton-de Donder-Weyl (1.13). Entonces de la expresión local (1.34) de  $FL$ , deducimos las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{(FL \circ \phi^{(1)})(t)} &= \frac{\partial (FL \circ \phi^{(1)})^i}{\partial t^A} \Big|_t = \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_t, \\ \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{(FL \circ \phi^{(1)})(t)} &= - \sum_{A=1}^k \frac{\partial (FL \circ \phi^{(1)})_A^i}{\partial t^A} \Big|_t \\ &= - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_t - \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_t. \end{aligned} \quad (2.19)$$

**4.** Por último, al ser  $L$  regular,  $FL$  es un difeomorfismo local y por tanto, la hipótesis  $E_L = \Phi^*E_L$  es localmente equivalente a  $FL^*H = (FL \circ \Phi)^*H$  en donde

$H = E_L \circ FL^{-1}$ . Teniendo en cuenta la expresión local de  $FL$  (1.34) y aplicando de nuevo la regla de la cadena se obtiene la última familia de identidades.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{FL(w)} + \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{FL(w)} \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_B^j} \Big|_w &= \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{(FL \circ \Phi)(w)} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^i} \Big|_w \\ &+ \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{(FL \circ \Phi)(w)} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_B^j} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^k}{\partial q^i} \Big|_w + \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^k \partial v_B^j} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_A^k}{\partial q^i} \Big|_w \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{FL(w)} \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j} \Big|_w &= \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{(FL \circ \Phi)(w)} \frac{\partial \Phi^j}{\partial v_A^i} \Big|_w \\ &+ \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{(FL \circ \Phi)(w)} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_B^j} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^k}{\partial v_A^i} \Big|_w + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_B^j} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial v_A^i} \Big|_w \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Estas últimas identidades, (2.20) y (2.21), son una parte fundamental de la demostración de esta proposición. Observemos que en estas identidades encontramos:

(i) Las derivadas parciales

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})(t)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})(t)},$$

que aparecen en las identidades (2.14) que tenemos que probar,

(ii) La relación de las derivadas parciales anteriores con las derivadas parciales

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{(FL \circ \phi^{(1)})(t)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{(FL \circ \phi^{(1)})(t)},$$

que ya conocemos por (2.19).

A partir de un extenso cálculo, de las ecuaciones (2.15-2.17), (2.19-2.21) uno prueba

$$0 = \frac{\partial^2 L}{\partial v_D^s \partial v_A^l} \Big|_{(\Phi \circ \phi^{(1)})(t)} \left( \frac{\partial H}{\partial p_l^A} \Big|_{(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})(t)} - \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_t - \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_B^j} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_t \right)$$

y puesto que  $L$  es regular, de la anterior identidad deducimos que

$$\frac{\partial H}{\partial p_l^A} \Big|_{(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})(t)} = \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_t + \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_B^j} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_t. \quad (2.22)$$

Además se tiene

$$\left. \frac{\partial(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})^l}{\partial t^A} \right|_t = \left. \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^j} \right|_{\phi^{(1)}(t)} \left. \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \right|_t + \left. \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_B^j} \right|_{\phi^{(1)}(t)} \left. \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \right|_t \quad (2.23)$$

y así de (2.22) y (2.23) obtenemos el apartado (a) de (2.14).

Finalmente, de (2.15), (2.16), (2.18-2.21) y (2.23), por un cálculo directo, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k \left. \frac{\partial(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})_A^m}{\partial t^A} \right|_t &= - \left. \frac{\partial H}{\partial q^m} \right|_{(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})(t)} \\ &+ \left. \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial v_A^i} \right|_{(\Phi \circ \phi^{(1)})(t)} \left( \left. \frac{\partial(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})^i}{\partial t^A} \right|_t - \left. \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \right|_{(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})(t)} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

y puesto que ya se tiene probado el apartado (a) de (2.14), de (2.24) y (a) se obtiene el apartado (b) de (2.14), finalizando así la demostración buscada.

□

Esta proposición nos proporciona un ejemplo de simetrías del sistema lagrangiano  $k$ -simplético  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$ .

### 2.2.2. Simetrías de Cartan y Teorema de Noether.

Teniendo en cuenta la última proposición de la subsección anterior introducimos la siguiente definición.

**Definición 2.21** Sea  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano regular.

- (1) Una **simetría de Cartan (o Noether) lagrangiana** o del sistema lagrangiano  $k$ -simplético  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$  es un difeomorfismo  $\Phi : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$  tal que,

- a)  $\Phi^* \omega_L^A = \omega_L^A$ , para  $A = 1, \dots, k$ .
- b)  $\Phi^* E_L = E_L$  (salvo constantes).

Si una simetría de Cartan  $\Phi$  es el levantamiento canónico a  $T_k^1 Q$  de algún difeomorfismo  $f : Q \rightarrow Q$ , esto es  $\Phi = T_k^1 f$ , entonces  $\Phi$  se dice **simetría de Cartan natural**.

(2) **Una simetría de Cartan (o Noether) infinitesimal** del sistema lagrangiano  $k$ -simplético  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$  es un campo de vectores  $Y \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$  verificando:

- a)  $\mathcal{L}_Y \omega_L^A = 0$ , para  $A = 1, \dots, k$ .
- b)  $\mathcal{L}_Y E_L = 0$ .

En el caso de que una simetría de Cartan infinitesimal  $Y$  sea el levantamiento completo a  $T_k^1 Q$  de algún campo de vectores  $Z$  en  $Q$ , esto es  $Y = Z^C$ , entonces se dice **simetría de Cartan infinitesimal natural**.

**Observación 2.22** Las simetrías de Cartan (infinitesimales) naturales serán utilizadas en la sección 2.2.4 de este capítulo en donde veremos que si  $(T_k^1 f)^* L = L$  (resp.  $Z^C(L) = 0$ ) entonces  $\Phi$  (resp.  $Z^C$ ) es una simetría de Cartan natural (resp. simetría infinitesimal).

◇

La siguiente proposición es fundamental para poder asociar leyes de conservación a las simetrías de Cartan, enunciando de este modo un teorema de tipo Noether dentro de la formulación lagrangiana  $k$ -simplética de las teorías clásicas de campo.

**Proposición 2.23** Sea  $Y \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$  una simetría de Cartan infinitesimal de un sistema lagrangiano  $k$ -simplético  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$ . Entonces, para cada  $p \in (T_k^1 Q)$ , existe un entorno abierto  $U_p$  del punto  $p$  en el que se verifica lo siguiente:

(1) Existen  $k$  funciones  $\mathcal{F}^A \in C^\infty(U_p)$ ,  $1 \leq A \leq k$ , únicas salvo constantes, tales que

$$\iota_Y \omega_L^A = d\mathcal{F}^A, \quad 1 \leq A \leq k, \quad (\text{en } U_p). \quad (2.25)$$

(2) Existen  $k$  funciones  $\zeta^A \in C^\infty(U_p)$ ,  $1 \leq A \leq k$ , verificando

$$\mathcal{L}_Y \theta_L^A = d\zeta^A, \quad 1 \leq A \leq k, \quad (\text{en } U_p).$$

Además estas funciones están relacionadas con las funciones  $\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k$  por la familia de identidades

$$\mathcal{F}^A = \iota_Y \theta_L^A - \zeta^A, \quad 1 \leq A \leq k, \quad (\text{salvo constantes, en } U_p). \quad (2.26)$$

*Demostración:*

Es análoga a la demostración de la Proposición 2.11.

□

Ahora podemos afirmar una versión del Teorema de Noether para simetrías de Cartan lagrangianas infinitesimales.

**Teorema 2.24** (Teorema de Noether): *Sea  $Y \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$  una simetría de Cartan infinitesimal de un sistema lagrangiano  $k$ -simplético  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$ , entonces para cada  $p \in T_k^1 Q$ , existe un entorno abierto  $U_p$  del punto  $p$ , tal que las funciones*

$$\mathcal{F}^A = \iota_Y \theta_L^A - \zeta^A, \quad 1 \leq A \leq k,$$

*definen una ley de conservación  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k)$  de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.44).*

*Demostración:*

Sea  $Y \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$  una simetría de Cartan infinitesimal, con expresión local

$$Y = Y^i \frac{\partial}{\partial q^i} + Y_A^i \frac{\partial}{\partial v_A^i}.$$

Entonces de (2.25), como  $Y$  es una simetría de Cartan infinitesimal se tiene

$$\left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_A^k} \right) Y^i - Y_B^i \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^i \partial v_A^k} = \frac{\partial \mathcal{F}^A}{\partial q^k} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_B^k \partial v_A^i} Y^i = \frac{\partial \mathcal{F}^A}{\partial v_B^k}. \quad (2.28)$$

Por otra parte, puesto que  $Y$  es una simetría infinitesimal, se verifica  $\mathcal{L}_Y E_L = 0$  de donde obtenemos

$$Y^i \frac{\partial L}{\partial q^i} = v_B^k \left( Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_B^k} + Y_A^i \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^k} \right). \quad (2.29)$$

Sea  $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  una solución de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (1.44), entonces de (1.44), (2.27), (2.28) y (2.29) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{A=1}^k \frac{\partial(\mathcal{F}^A \circ \phi^{(1)})}{\partial t^A} \Big|_t = \sum_{A=1}^k \left( \frac{\partial \mathcal{F}^A}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial \phi^k}{\partial t^A} \Big|_t + \frac{\partial \mathcal{F}^A}{\partial v_B^k} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_t \right) \\
&= \sum_{A=1}^k Y^i(\phi^{(1)}(t)) \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial \phi^k}{\partial t^A} \Big|_t + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^k \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_t \right) \\
&\quad - \sum_{A=1}^k \left( Y^i(\phi^{(1)}(t)) \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_A^k} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} + Y_B^i(\phi^{(1)}(t)) \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^i \partial v_A^k} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \right) \frac{\partial \phi^k}{\partial t^A} \Big|_t \\
&= Y^i(\phi^{(1)}(t)) \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} - Y^i(\phi^{(1)}(t)) \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} = 0 \quad (\text{en } U_p)
\end{aligned}$$

esto es,  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k)$  es una ley de conservación de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

□

De modo análogo a como ocurría en el caso hamiltoniano se verifica:

**Teorema 2.25** *Si  $Y \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$  es una simetría de Cartan infinitesimal de un sistema lagrangiano  $k$ -simplético  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$  entonces, para cada  $(X_L^1, \dots, X_L^k) \in \mathfrak{X}_L^k(T_k^1 Q)$  solución de las ecuaciones algebraicas de Euler-Lagrange (1.45), se verifica*

$$\sum_{A=1}^k \mathcal{L}_{X_L^A} \mathcal{F}^A = 0 \quad (\text{en } U_p) .$$

*Demostración:*

Es consecuencia del Teorema 2.24 y de (2.13).

□

**Observación 2.26** En la Mecánica lagrangiana Autónoma los dos Teoremas que se acaban de enunciar son equivalentes. En nuestro contexto esta equivalencia no se tiene como justifica la observación 2.18.

Como corolario del Teorema de Noether 2.24 se tiene la siguiente versión para las simetrías infinitesimales de Cartan naturales:

**Corolario 2.27** *Si  $Z^C \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$  es una simetría de Cartan infinitesimal natural de un sistema lagrangiano  $k$ -simpléctico  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$ , entonces las funciones*

$$\mathfrak{F}^A = Z^{V_A}(L) - \zeta^A, \quad 1 \leq A \leq k,$$

*definen a ley de conservación en  $U_p$ .*

*Demostración:*

En este caso, se tiene

$$\iota_{Z^C} \theta_L^A = \theta_L^A(Z^C) = dL \circ J^A(Z^C) = dL(Z^{V_A}) = Z^{V_A}(L),$$

y por tanto las funciones  $\mathfrak{F}^1, \dots, \mathfrak{F}^k$  de la Proposición 2.23 son en este caso

$$\mathfrak{F}^A = Z^{V_A}(L) - \zeta^A, \quad 1 \leq A \leq k \text{ (salvo constantes).}$$

Ahora, aplicando el Teorema de Noether 2.13 se obtiene que estas funciones definen una ley de conservación de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange.

□

**Observación 2.28** El caso  $k = 1$  se corresponde con la Mecánica lagrangiana Autónoma, y los resultados anteriores, reescritos para este caso particular, se pueden encontrar en diversos trabajos entre los que podemos citar a Crampin [30].

◇

Con el fin de establecer otro corolario del Teorema de Noether 2.24 introducimos la siguiente generalización del llamado *operador de Tulczyjew* (véase [132]): Sea  $g = (g^1, \dots, g^k) : Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  una  $k$ -tupla de funciones, definimos el siguiente operador

$$\begin{aligned} d_T g: \quad T_k^1 Q &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) &\mapsto d_T g(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) := \sum_{A=1}^k v_{A\mathbf{q}}(g^A) \end{aligned} \quad (2.30)$$

y con expresión local

$$d_T g(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = \sum_{A,i} v_A^i \frac{\partial g^A}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}}. \quad (2.31)$$



**Lema 2.29** Consideremos una aplicación  $g = (g^1, \dots, g^k) : Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  y  $Z$  un campo de vectores en  $Q$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1)  $Z^C(L) = d_T g$ .
- (2)  $\mathcal{L}_{Z^C} \theta_L^A = d(\tau_Q^k)^* g^A$ ,  $1 \leq A \leq k$  y  $Z^C(E_L) = 0$ ,

*Demostración:*

Este resultado es consecuencia directa de un cálculo en coordenadas locales.

Considerando un sistema de coordenadas locales  $(q^i, v_A^i)$  en  $T_k^1 Q$ , de las expresiones locales (1.37) y (2.31) de  $Z^C$  y  $d_T g$ , obtenemos que la condición  $Z^C(L) = d_T g$  se escribe localmente como sigue:

$$Z^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + v_B^i \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \frac{\partial L}{\partial v_B^j} = v_B^i \frac{\partial g^B}{\partial q^i},$$

de donde, calculando la parcial  $\partial/\partial v_C^k$ , obtenemos

$$Z^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_C^k} + \frac{\partial Z^j}{\partial q^k} \frac{\partial L}{\partial v_B^j} + v_B^i \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_C^k} = \frac{\partial g^C}{\partial q^k}. \quad (2.32)$$

Tenemos que probar la familia de igualdades de (2) Para cada  $A$ ,  $1 \leq A \leq k$ , de las expresiones locales (1.37), (1.32) y (1.33) de  $Z^C$ ,  $\theta_L^A$  y  $\omega_L^A$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Z^C} \theta_L^A &= d_{Z^C} \theta_L^A - \iota_{Z^C} \omega_L^A \\ &= \left( Z^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_A^k} + \frac{\partial Z^j}{\partial q^k} \frac{\partial L}{\partial v_A^j} + v_B^i \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^k} \right) dq^k \\ &= \frac{\partial g^A}{\partial q^k} dq^k = d(\tau_Q^k)^* g^A, \end{aligned}$$

en donde en la penúltima igualdad hemos usado la hipótesis (2.32).

Por otra parte,

$$Z^C(E_L) = Z^C(\Delta L - L) = Z^C(\Delta L) - Z^C(L) = Z^C(\Delta L) - d_T g$$

por tanto para probar que  $Z^C(E_L) = 0$  es suficiente comprobar que  $Z^C(\Delta L) = d_T g$ . Ahora bien, tenemos

$$\begin{aligned} Z^C(\Delta L) &= Z^C(v_A^i \frac{\partial L}{\partial v_A^i}) = v_A^i Z^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} + v_A^i v_B^j \frac{\partial Z^k}{\partial q^j} \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^k \partial v_A^i} + v_A^i \frac{\partial Z^k}{\partial q^i} \frac{\partial L}{\partial v_A^k} \\ &= v_A^i \left( Z^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} + v_B^j \frac{\partial Z^k}{\partial q^j} \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^k \partial v_A^i} + \frac{\partial Z^k}{\partial q^i} \frac{\partial L}{\partial v_A^k} \right) = v_A^i \frac{\partial g^A}{\partial q^i} = d_T g \end{aligned}$$

en donde hemos usado (2.32).

Recíprocamente, supongamos que  $\mathcal{L}_{Z^C}\theta_L^A = d(\tau_Q^k)^*g^A$ ,  $1 \leq A \leq k$  y  $Z^C(E_L) = 0$ .

La condición  $\mathcal{L}_{Z^C}\theta_L^A = d(\tau_Q^k)^*g^A$ ,  $1 \leq A \leq k$  equivale a

$$\left( Z^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_A^k} + \frac{\partial Z^j}{\partial q^k} \frac{\partial L}{\partial v_A^j} + v_B^i \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^k} \right) dq^k = \frac{\partial g^A}{\partial q^k} dq^k.$$

Por lo tanto tenemos

$$Z^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_A^k} + \frac{\partial Z^j}{\partial q^k} \frac{\partial L}{\partial v_A^j} + v_B^i \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^k} = \frac{\partial g^A}{\partial q^k}$$

de donde se obtiene

$$v_A^k Z^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_A^k} + v_A^k \frac{\partial Z^j}{\partial q^k} \frac{\partial L}{\partial v_A^j} + v_A^k v_B^i \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^k} = v_A^k \frac{\partial g^A}{\partial q^k}$$

o equivalentemente

$$Z^C(\Delta L) = d_T g.$$

Entonces puesto que  $0 = Z^C(E_L) = Z^C(\Delta L) - Z^C(L) = d_T g - Z^C(L)$  se obtiene

$$Z^C(L) = d_T g.$$

□

**Observación 2.30** Teniendo en cuenta la equivalencia establecida en el Lema anterior obtenemos que la condición  $Z^C(L) = d_T g$  implica que

$$Z^C(E_L) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_{Z^C}\omega_L^A = -d\mathcal{L}_{Z^C}\theta_L^A = -d(d(\tau_Q^k)^*g^A) = 0.$$

Por lo tanto si  $Z^C(L) = d_T g$  entonces  $Z^C$  es una simetría de Cartan infinitesimal natural del sistema lagrangiano  $k$ -simplético  $(T_k^1 Q, \omega^A, E_L)$ .

Así podemos aplicar la Proposición 2.23. Comparando el ítem (2) de la Proposición 2.23 y el ítem (2) del Lema 2.29 obtenemos que las funciones  $\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k$ , bajo la hipótesis  $Z^C(L) = d_T g$  son:

$$\mathcal{F}^A = Z^{V_A}(L) - (\tau_Q^k)^*g^A \quad A = 1, \dots, k.$$

◇

Así, reescribiendo el Teorema de Noether 2.24 para esta situación obtenemos:

**Proposición 2.31** *Sea  $Z \in \mathfrak{X}(Q)$  un campo de vectores en  $Q$  verificando que*

$$Z^C(L) = d_T g$$

*para alguna aplicación  $g = (g^1, \dots, g^k): Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ , en donde  $Z^C$  denota el levantamiento completo de  $Z$  a  $T_k^1 Q$ . Entonces las funciones*

$$\mathcal{F}^A = Z^{V_A}(L) - (\tau_Q^k)^* g^A, \quad 1 \leq A \leq k,$$

*definen una ley de conservación para las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.44).*

*Demostración:*

Es una consecuencia del Teorema 2.24 y la observación que se acaba de realizar.

□

**Observación 2.32** En el caso particular  $k = 1$ , el resultado anterior puede encontrarse en J. Cariñena *et al.* [17] y Marmo *et al.* [93].

◇

### 2.2.3. lagrangianos equivalentes.

Dado un sistema lagrangiano  $k$ -simplético  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$ , sabemos que los levantamientos de difeomorfismos y campos de vectores preservan los elementos geométricos canónicos de  $T_k^1 Q$  (véase Lema 1.39).

Sin embargo, la estructura  $k$ -simplética dada por las formas  $\omega_L^A$  no es canónica, puesto que depende de la elección de la función lagrangiana  $L$ , y en consecuencia no es invariante por estos levantamientos canónicos.

Así, dado un difeomorfismo  $\Phi: T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$  o un campo de vectores  $Y \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$ , una condición suficiente para asegurar las condiciones (a) y (b) de la definición 2.21 será pedir que  $\Phi$  o  $Y$  dejen invariante la estructura  $k$ -tangente  $J^1, \dots, J^k$  y el campo de vectores de Liouville  $\Delta$ , (por ejemplo,  $\Phi$  e  $Y$  siendo los levantamientos canónicos de un difeomorfismo y un campo de vectores en  $Q$ ), y que la función lagrangiana  $L$

sea también invariante. De este modo,  $\omega_L^A$ ,  $E_L$  y en consecuencia las ecuaciones de Euler-Lagrange son invariantes por  $\Phi$  o  $Y$ .

Pedir la invarianza de  $L$  es una condición fuerte, puesto que existen funciones lagrangianas que, siendo diferentes, dan lugar a la misma estructura  $k$ -simpléctica  $\omega_L^A$ ,  $A = 1, \dots, k$ , y a las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange.

Con la finalidad de no exigir que la función  $L$  sea invariante vamos a introducir el concepto de lagrangianos equivalentes. Así, siguiendo la misma terminología de la mecánica (véase [1]), podemos definir:

**Definición 2.33** *Dos funciones lagrangianas  $L_1, L_2 \in C^\infty(T_k^1 Q)$  son gauge equivalentes si*

- (1)  $\omega_{L_1}^A = \omega_{L_2}^A$ , para  $A = 1, \dots, k$ .
- (2)  $\mathfrak{X}_{L_1}^k(T_k^1 Q) = \mathfrak{X}_{L_2}^k(T_k^1 Q)$ ,

en donde recordemos que  $\mathfrak{X}_L^k(T_k^1 Q)$  denota el conjunto de campos de  $k$ -vectores solución de la ecuación geométrica de Euler-Lagrange (1.45).

Los lagrangianos gauge equivalentes se pueden caracterizar como sigue:

**Proposición 2.34** *Dos lagrangianos  $L_1, L_2 \in C^\infty(T_k^1 Q)$  son gauge equivalentes si, y sólo si,*

- (1)  $\omega_{L_1}^A = \omega_{L_2}^A$ , para  $A = 1, \dots, k$ .
- (2)  $E_{L_1} = E_{L_2}$ , (salvo constantes).

*Demostración:*

Demostraremos que bajo la hipótesis  $\omega_{L_1}^A = \omega_{L_2}^A$  se verifica que:

$$\mathfrak{X}_{L_2}^k(T_k^1 Q) = \mathfrak{X}_{L_1}^k(T_k^1 Q) \text{ es equivalente a } E_{L_1} = E_{L_2} \text{ (salvo constantes).}$$

Si  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}_{L_2}^k(T_k^1 Q) = \mathfrak{X}_{L_1}^k(T_k^1 Q)$ , entonces

$$0 = \sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega_{L_1}^A - dE_{L_1} = \sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega_{L_2}^A - dE_{L_2}$$

pero como  $\omega_{L_1}^A = \omega_{L_2}^A$ , esto implica que  $dE_{L_1} = dE_{L_2}$ , y por tanto  $E_{L_1} = E_{L_2}$ , salvo constantes.

Recíprocamente, si  $E_{L_1} = E_{L_2}$  (salvo constantes), entonces para cada  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}_{L_1}^k(T_k^1Q)$ , se tiene

$$0 = \sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega_{L_1}^A - dE_{L_1} = \sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega_{L_2}^A - dE_{L_2}$$

en donde estamos usando que  $\omega_{L_1}^A = \omega_{L_2}^A$ ,  $1 \leq A \leq k$ . Así,  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_{L_2}^k(T_k^1Q)$ .

De modo análogo se demuestra que si  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_{L_2}^k(T_k^1Q)$ , entonces  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_{L_1}^k(T_k^1Q)$ .

□

La definición 2.33 de lagrangianos gauge equivalentes garantiza que el conjunto de campos de  $k$ -vectores solución de las ecuaciones geométricas de Euler-Lagrange (1.45) asociadas a los dos lagrangianos es el mismo.

En la siguiente proposición demostraremos que si dos lagrangianos son gauge equivalentes entonces tenemos un resultado análogo, al que acabamos de demostrar, relativo a las soluciones de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (1.44) definidas por cada uno de los lagrangianos.

**Proposición 2.35** *Si las funciones lagrangianas  $L_1, L_2 \in C^\infty(T_k^1Q)$  son gauge equivalentes entonces, las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (1.44) asociadas a  $L_1$  y  $L_2$  tienen las mismas soluciones.*

*Demostración:*

Si  $L_1, L_2 \in C^\infty(T_k^1Q)$  son dos lagrangianos gauge equivalentes, entonces por la proposición 2.34 sabemos que se verifica:

$$\omega_{L_1}^A = \omega_{L_2}^A, \text{ para } A = 1, \dots, k \text{ y } E_{L_1} = E_{L_2}, \text{ (salvo constantes).}$$

De la condición  $\omega_{L_1}^A = \omega_{L_2}^A$  y de la expresión local de  $\omega_L^A$ , (1.33), deducimos que

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial q^j \partial v_A^i} = \frac{\partial^2 L_2}{\partial q^j \partial v_A^i} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 L_1}{\partial v_B^j \partial v_A^i} = \frac{\partial^2 L_2}{\partial v_B^j \partial v_A^i}. \quad (2.33)$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L_1}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \right) &= \frac{\partial^2 L_1}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial^2 L_1}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \\ &= \frac{\partial^2 L_2}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial^2 L_2}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} = \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L_2}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por otra parte, la condición  $E_{L_1} = E_{L_2}$  (salvo constantes), implica

$$\frac{\partial E_{L_1}}{\partial q^j} = \frac{\partial E_{L_2}}{\partial q^j}.$$

De esta identidad y de la expresión local de la función energía lagrangiana

$$E_L = v_A^i \frac{\partial L}{\partial v_A^i} - L$$

se deduce

$$v_A^i \frac{\partial^2 L_1}{\partial q^j \partial v_A^i} - \frac{\partial L_1}{\partial q^j} = v_A^i \frac{\partial^2 L_2}{\partial q^j \partial v_A^i} - \frac{\partial L_2}{\partial q^j}. \quad (2.35)$$

De (2.33) y (2.35) obtenemos

$$\frac{\partial L_1}{\partial q^j} = \frac{\partial L_2}{\partial q^j} \quad (2.36)$$

y entonces, de (2.34) y (2.36) se sigue

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L_1}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \right) - \frac{\partial L_1}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} = \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L_2}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(t)} \right) - \frac{\partial L_2}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(t)}.$$

Por lo tanto  $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a  $L_1$  si, y sólo si, es solución de las ecuaciones asociadas a  $L_2$ .

□

El siguiente Lema nos permitirá caracterizar los lagrangianos gauge equivalentes.

**Lema 2.36** *Un lagrangiano  $L: T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  verifica*

$$\omega_L^A = 0, \text{ para cada } A = 1, \dots, k,$$

*si, y sólo si, existen  $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ , 1-formas cerradas en  $Q$ , y una función  $f \in \mathcal{C}^\infty(Q)$ , tales que*

$$L = \hat{\alpha} + (\tau_Q^k)^* f \text{ (salvo constantes),}$$

*donde  $\hat{\alpha} \in C^\infty(T_k^1 Q)$  es la función definida en  $T_k^1 Q$  por*

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} : T_k^1 Q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w_{\mathbf{q}} = (v_{1_{\mathbf{q}}}, \dots, v_{k_{\mathbf{q}}}) &\longmapsto \sum_{A=1}^k \alpha_{\mathbf{q}}^A(v_{A_{\mathbf{q}}}) \end{aligned}$$

*y  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$  es la proyección canónica.*

*Demostración:*

Supongamos que

$$\omega_L^A = -d\theta_L^A = 0, \quad 1 \leq A \leq k,$$

entonces  $\theta_L^A = dL \circ J^A$  son 1-formas en  $T_k^1 Q$  cerradas y semibásicas, por tanto  $dL \circ J^A$  son formas básicas, esto es, existen ciertas 1-formas en  $Q$ ,  $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ , tales que

$$dL \circ J^A = (\tau_Q^k)^* \alpha^A, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (2.37)$$

Además, puesto que

$$0 = d\theta_L^A = d((\tau_Q^k)^* \alpha^A) = (\tau_Q^k)^*(d\alpha^A),$$

entonces  $d\alpha^A = 0$ ; esto es, cada  $\alpha^A$  es una 1-forma cerrada en  $Q$ .

Por otra parte, mediante un cálculo en coordenadas locales obtenemos

$$d\hat{\alpha} \circ J^A = (\tau_Q^k)^* \alpha^A, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (2.38)$$

Entonces de (2.37) y (2.38) se obtiene  $dL \circ J^A = d\hat{\alpha} \circ J^A$  o equivalentemente

$$d(L - \hat{\alpha}) \circ J^A = 0.$$

Así, la 1-forma  $d(L - \hat{\alpha})$  es cerrada y semibásica y en consecuencia,  $d(L - \hat{\alpha})$  es una 1-forma básica; esto es, existe  $f \in C^\infty(Q)$  tal que

$$d(L - \hat{\alpha}) = (\tau_Q^k)^* df = d((\tau_Q^k)^* f).$$

Entonces  $L = \hat{\alpha} + (\tau_Q^k)^* f$  (salvo constantes).

Recíprocamente, supongamos que  $L = \hat{\alpha} + (\tau_Q^k)^* f$  (salvo constante). Para cada  $A = 1, \dots, k$  se tiene

$$\theta_L^A = dL \circ J^A = d(\hat{\alpha} + (\tau_Q^k)^* f) \circ J^A = d\hat{\alpha} \circ J^A = (\tau_Q^k)^* \alpha^A ,$$

puesto que  $d(\tau_Q^k)^* f$  se anula en los campos de vectores verticales. Como  $\alpha^A$  es cerrada,  $d\alpha^A = 0$  y obtenemos

$$\omega_L^A = -d\theta_L^A = -d((\tau_Q^k)^* \alpha^A) = -(\tau_Q^k)^*(d\alpha^A) = 0 .$$

□

**Observación 2.37** Este Lema es una generalización del correspondiente resultado de la Mecánica lagrangiana Autónoma (véase [1], p 216).

◇

La función  $\hat{\alpha}$  definida en el Lema anterior nos permite establecer cuando dos lagrangianos son gauge equivalentes.

**Proposición 2.38** *Las funciones lagrangianas  $L_1, L_2 \in C^\infty(T_k^1 Q)$  son gauge equivalentes si, y sólo si,  $L_1 = L_2 + \hat{\alpha}$  (salvo constantes).*

*Demostración:*

Supongamos que  $L_1, L_2 \in C^\infty(T_k^1 Q)$  son gauge equivalentes.

Como  $\omega_{L_1}^A = \omega_{L_2}^A$ , entonces  $\omega_{L_1 - L_2}^A = 0$ ,  $1 \leq A \leq k$ . Así, del Lema 2.36 sabemos que existen  $\alpha^1, \dots, \alpha^k$  1-formas cerradas en  $Q$ , y  $f \in \mathcal{C}^\infty(Q)$  tales que

$$L_1 - L_2 = \hat{\alpha} + (\tau_Q^k)^* f \quad (\text{salvo constante}).$$

De la Proposición 2.34 sabemos que  $E_{L_1} = E_{L_2}$ , (salvo constantes), o equivalentemente,  $E_{L_1} - E_{L_2} = 0$  (salvo constante). Así,

$$\begin{aligned} 0 &= E_{L_1} - E_{L_2} = \Delta(L_1) - L_1 - \Delta(L_2) + L_2 = \Delta(L_1 - L_2) - (L_1 - L_2) \\ &= \Delta(\hat{\alpha} + (\tau_Q^k)^* f) - (L_1 - L_2) = \hat{\alpha} - (L_1 - L_2) \quad (\text{salvo constantes}), \end{aligned}$$



de donde se sigue la igualdad buscada.

Recíprocamente, supongamos  $L_1 = L_2 + \hat{\alpha}$  (salvo constantes). En primer lugar, un sencillo cálculo nos proporciona

$$\begin{aligned}\omega_{L_2}^A - \omega_{L_1}^A &= d(\theta_{L_1}^A - \theta_{L_2}^A) = d(d(L_1 - L_2) \circ J^A) = d(d\hat{\alpha} \circ J^A) = d((\tau_Q^k)^* \alpha^A) \\ &= (\tau_Q^k)^*(d\alpha^A) = 0.\end{aligned}$$

Así  $\omega_{L_1}^A = \omega_{L_2}^A$ . Además,

$$E_{L_1} = \Delta(L_1) - L_1 = \Delta(L_2 + \hat{\alpha}) - (L_2 + \hat{\alpha}) = E_{L_2} + \hat{\alpha} - \hat{\alpha} = E_{L_2} \quad (\text{salvo constantes}),$$

puesto que  $\Delta(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha}$ .

Como  $\omega_{L_1}^A = \omega_{L_2}^A$  y  $E_{L_1} = E_{L_2}$  (salvo constante) entonces  $L_1$  y  $L_2$  son lagrangianos gauge equivalentes. (véase Proposición 2.34).

□

## 2.2.4. Simetrías lagrangianas gauge

Teniendo en mente los resultados de la sección anterior, podemos definir:

**Definición 2.39** Sea  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$  un sistema lagrangiano  $k$ -simplético.

- (1) Una **simetría lagrangiana gauge** es un difeomorfismo  $\Phi: T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$  tal que  $L$  y  $\Phi^* L$  son lagrangianos gauge equivalentes; esto es,  $\Phi^* L = L + \hat{\alpha}$  (salvo constantes), siendo  $\hat{\alpha} \in C^\infty(T_k^1 Q)$  la función definida en la Proposición 2.36.

Una simetría lagrangiana gauge se dice **natural** si existe un difeomorfismo  $\varphi: Q \rightarrow Q$  tal que  $\Phi = (T_k^1 \varphi)$ .

- (2) Un **simetría lagrangiana infinitesimal gauge** es un campo de vectores  $Y \in \mathfrak{X}(TQ)$  cuyos flujos locales son simetrías lagrangianas gauge.

Una simetría lagrangiana infinitesimal gauge se dice **natural** si existe un campo de vectores  $Z \in \mathfrak{X}(Q)$  tal que  $Y = Z^C$ ,

En esta sección tendrán especial interés las simetrías lagrangianas gauge (infinitesimales) naturales ya que se pueden relacionar con las simetrías de Cartan (infinitesimales) naturales definidas en 2.21, como veremos en la proposición 2.42.

**Observación 2.40** Una simetría lagrangiana gauge  $\Phi: T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$  de un sistema lagrangiano  $k$ -simplético no es necesariamente una simetría de Cartan, puesto que en general  $\Phi^* \omega_L^A \neq \omega_{\Phi^* L}^A$ , para  $A = 1, \dots, k$ , y  $\Phi^* E_L \neq E_{\Phi^* L}$ , como puede ser fácilmente demostrado por medio de un cálculo en coordenadas.

◇

En general se tiene:

**Lema 2.41** Sea  $\varphi: Q \rightarrow Q$  un difeomorfismo y sea  $\Phi = T_k^1(\varphi)$  la prolongación canónica de  $\varphi$ . Entonces:

$$(i) \Phi^* \theta_L^A = \theta_{\Phi^* L}^A, \quad (ii) \Phi^* \omega_L^A = \omega_{\Phi^* L}^A, \quad (iii) \Phi^* E_L = E_{\Phi^* L}.$$

*Demostración:*

(i) Es consecuencia directa del lema 1.39 y de la definición (1.30) de  $\theta_L^A$ . En efecto, para cada  $A = 1, \dots, k$  se verifica:

$$\begin{aligned} (\Phi^* \theta_L^A)_{w_q}(W_{w_q}) &= \theta_{L \circ \Phi}^A(\Phi_*(w_q)(W_{w_q})) = (dL \circ J^A)_{\Phi(w_q)}(\Phi_*(w_q)(W_{w_q})) \\ &= dL_{\Phi(w_q)}(J^A(\Phi_*(w_q)(W_{w_q}))) = dL_{\Phi(w_q)}(\Phi_*(w_q)(J^A(W_{w_q}))) \\ &= d(L \circ \Phi)_{w_q}(J^A(W_{w_q})) = (d\Phi^* L \circ J^A)_{w_q}(W_{w_q}) = (\theta_{\Phi^* L}^A)_{w_q}(W_{w_q}), \end{aligned}$$

en donde  $W_{w_q} \in T_{w_q}(T_k^1 Q)$  y  $w_q \in T_k^1 Q$ . Entonces,  $\Phi^* \theta_L^A = \theta_{\Phi^* L}^A$ .

(ii) Es una consecuencia inmediata de (i).

(iii) El Lema 1.39 afirma que  $\Phi_* \Delta = \Delta$ , esto es, en cada  $w_q \in T_k^1 Q$  se verifica

$$\Delta(\Phi^* L)(w_q) = \Delta(L) \circ \Phi(w_q)$$

por tanto,

$$\Phi^* E_L = \Phi^*(\Delta(L) - L) = \Delta(L) \circ \Phi - \Phi^* L = \Delta(\Phi^* L) - \Phi^* L = E_{\Phi^* L}.$$

□

Y por tanto se tiene la siguiente relación entre simetrías naturales de Cartan y gauge simetrías naturales:

**Proposición 2.42** *Sea  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$  un sistema lagrangiano  $k$ -simplético. Entonces,  $\Phi: T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$  es una simetría lagrangiana de Cartan natural si, y sólo si, es una simetría lagrangiana gauge natural.*

*Demostración:*

Si  $\Phi = T_k^1(\varphi)$  para algún difeomorfismo  $\varphi: Q \rightarrow Q$ , por el Lemma 2.41 se tiene

$$\Phi^* \omega_L^A = \omega_{\Phi^* L}^A, \quad \Phi^* E_L = E_{\Phi^* L}$$

por tanto

$$\left. \begin{array}{l} \Phi^* \omega_L^A = \omega_L^A \\ \Phi^* E_L = E_L \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \omega_{\Phi^* L}^A = \omega_L^A \\ E_{\Phi^* L} = E_L \end{array} \right.$$

esto es,  $\Phi$  es una simetría lagrangiana de Cartan natural (véase definición 2.21) si, y sólo si,  $L$  y  $\Phi^* L$  son lagrangianos gauge equivalentes y por tanto,  $\Phi$  es una simetría lagrangiana gauge natural.

□

Este resultado también se tiene para simetrías lagrangianas infinitesimales sin más que considerar la versión infinitesimal del Lema 2.41.

En particular, si

$$(T_k^1 \varphi)^* L = L$$

entonces  $L$  y  $(T_k^1 \varphi)^* L$  son lagrangianos gauge equivalentes. Por la definición 2.39 obtenemos que  $T_k^1 \varphi$  es una simetría lagrangiana gauge natural y por la proposición 2.42 es una simetría de Cartan lagrangiana natural.

De modo análogo se prueba la versión infinitesimal:  $Z^C(L) = 0$  entonces  $Z^C$  simetría de Cartan lagrangiana infinitesimal natural.

Finalmente, podemos afirmar una versión particular del Teorema de Noether para ciertas simetrías lagrangianas naturales :

**Teorema 2.43** *Sea  $Y \in \mathfrak{X}((T_k^1 Q))$  una simetría de Cartan lagrangiana infinitesimal natural de un sistema lagrangiano  $k$ -simplético  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$ , con  $Y = Z^C$ , para algún  $Z \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$ . Si*

$$Z^C(L) = 0$$

*entonces las funciones*

$$\mathcal{F}^A = Z^{V_A}(L), \quad 1 \leq A \leq k,$$

definen una ley de conservación  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k)$  para las ecuaciones de Euler-Lagrange.

*Demostración:*

Esto es una consecuencia de la Proposición anterior y el Corolario 2.27 puesto que, en este caso las funciones  $\zeta^A$  son cero salvo constantes al verificarse:

$$d\zeta^A = \mathcal{L}_Y \theta_L^A = \mathcal{L}_{Z^C} \theta_L^A = 0 \quad , \quad 1 \leq A \leq k .$$

□

**Observación 2.44** En el caso  $k = 1$ , el anterior resultado puede ser encontrado en [3, 93].

◇

## 2.3. Tabla de simetrías y leyes de conservación

Las siguientes tablas recogen los distintos tipos de simetrías que hemos introducido a lo largo del capítulo.

Nombre	Definición	Ley de conservación $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k)$
Simetría de Cartan hamiltoniana	$\Phi : (T_k^1)^*Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$ $\Phi^* \omega^A = \omega^A$ $\Phi^* H = H$	
Simetría de Cartan hamiltoniana infinitesimal	$Y \in \mathfrak{X}((T_k^1)^*Q)$ $\mathcal{L}_Y \omega^A = 0$ $\mathcal{L}_Y H = 0$	$\mathcal{F}^A = \iota_Y \theta^A - \zeta^A \in \mathcal{C}^\infty((T_k^1)^*Q)$
Simetría de Cartan hamiltoniana infinitesimal estricta	$Y \in \mathfrak{X}((T_k^1)^*Q)$ $\mathcal{L}_Y \theta^A = 0$ $\mathcal{L}_Y H = 0$	$\mathcal{F}^A = \iota_Y \theta^A \in \mathcal{C}^\infty((T_k^1)^*Q)$

Nombre	Definición	Ley de conservación $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^k)$
Simetría de Cartan lagrangiana	$\Phi : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$ $\Phi^* \omega_L^A = \omega_L^A$ $\Phi^* E_L = E_L$	
Simetría de Cartan lagrangiana natural	$\Phi = T_k^1 \varphi : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$ $(T_k^1 \varphi)^* \omega_L^A = \omega_L^A$ $(T_k^1 \varphi)^* E_L = E_L$	
Simetría de Cartan lagrangiana infinitesimal	$Y \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$ $\mathcal{L}_Y \omega_L^A = 0$ $\mathcal{L}_Y E_L = 0$	$\mathcal{F}^A = \iota_Y \theta_L^A - \zeta^A \in \mathcal{C}^\infty(T_k^1 Q)$
Simetría de Cartan lagrangiana infinitesimal natural	$Z^C \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$ $\mathcal{L}_{Z^C} \omega_L^A = 0$ $\mathcal{L}_{Z^C} E_L = 0$	$\mathcal{F}^A = Z^{V_A}(L) - \zeta^A \in \mathcal{C}^\infty(T_k^1 Q)$
Caso particular de simetría de Cartan lagrangiana infinitesimal natural	$Z^C(L) = d_T g,$ $g : Q \rightarrow \mathbb{R}^k,$ $d_T g$ op. de Tulczyjew	$\mathcal{F}^A = Z^{V_A}(L) - (\tau_Q^k)^* g^A \in \mathcal{C}^\infty(T_k^1 Q)$
Caso particular de simetría de Cartan lagrangiana infinitesimal natural	$Z^C(L) = 0$	$\mathcal{F}^A = Z^{V_A}(L) \in \mathcal{C}^\infty(T_k^1 Q)$



## Capítulo 3

# Teoría de Campos con ligaduras no-holonómicas. Enfoque $k$ -simpléctico.

En este capítulo consideramos las ecuaciones de Euler-Lagrange y de Hamilton-De Donder-Weyl que están sujetas a ligaduras no-holonómicas. El formalismo  $k$ -simpléctico nos permite describir estas ecuaciones de campo no-holonómicas en términos geométricos.

Por lo tanto, nuestro principal objetivo será describir, en términos geométricos, las ecuaciones

$$\left. \frac{\partial L}{\partial q^i} \right|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} - \sum_{A=1}^k \left. \frac{\partial}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} \left( \left. \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \right|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) = F_i(\phi^{(1)}(\mathbf{t})) \quad (i = 1, \dots, n),$$
$$\Phi_\alpha(\phi^{(1)}(\mathbf{t})) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

donde  $\Phi_\alpha$  son las funciones de ligadura y  $F_i$  son ciertas funciones que describiremos a lo largo del capítulo. Estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de campo lagrangianas no-holonómicas, véase J. Vankerschaver *et al.*, [138].

### 3.1. Formulación lagrangiana no-holonómica.

Nuestra teoría de campos no-holonómicos se construirá con los siguientes objetos:

(i) Un lagrangiano regular  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ .

(ii) Una subvariedad de ligaduras  $\mathcal{M} \hookrightarrow T_k^1 Q$ .

Esta subvariedad  $\mathcal{M}$  puede expresarse localmente mediante ecuaciones de la forma

$$\Phi_\alpha(q^i, v_A^i) = 0$$

con  $\alpha = 1, \dots, m$ . Además se impone la condición de que la matriz  $(\partial\Phi_\alpha/\partial v_A^i)$  tenga rango máximo  $m$ . Obsérvese que  $\Phi_\alpha(q^i, v_A^i) = 0$  serán las ecuaciones de ligadura.

(iii) Un fibrado  $F$  de formas de ligadura y una distribución de ligaduras  $\mathcal{S}$  inducida por  $F$ , ambos objetos definidos a lo largo de  $\mathcal{M}$ .

El fibrado  $F$  va a jugar el mismo papel que el fibrado de fuerzas de reacción en la Mecánica no-holónica.

A continuación estudiaremos los objetos geométricos mencionados en (ii) y (iii).

### 3.1.1. La subvariedad de ligaduras.

Suponemos que  $\mathcal{M} \hookrightarrow T_k^1 Q$  es una subvariedad de  $T_k^1 Q$  de codimensión  $m$ , que representa algunas ligaduras externas impuestas al campo. Aunque se pueden considerar situaciones más generales, para mayor claridad nos restringiremos al caso en el que la subvariedad  $\mathcal{M}$  verifica las siguientes condiciones:

(1)  $\mathcal{M}$  se proyecta sobre toda la variedad  $Q$ , es decir,  $\tau_Q^k(\mathcal{M}) = Q$ .

(2) La restricción  $\tau_Q^k|_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow Q$  de  $\tau_Q^k$  a  $\mathcal{M}$  es un fibrado vectorial.

Puesto que  $\mathcal{M}$  es una subvariedad de  $T_k^1 Q$ , siempre se puede encontrar un recubrimiento  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}$  formado por una familia de subconjuntos abiertos  $U$  de  $T_k^1 Q$ , con  $\mathcal{M} \cap U \neq \emptyset$ , y tales que, en cada abierto  $U \in \mathcal{U}$ , existen  $m$  funciones diferenciables e independientes  $\Phi_\alpha$  que determinan  $\mathcal{M}$  de forma local, es decir,

$$\mathcal{M} \cap U = \{w_{\mathbf{q}} = (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) \in T_k^1 Q \mid \Phi_\alpha(w_{\mathbf{q}}) = 0 \text{ para } 1 \leq \alpha \leq m\}. \quad (3.1)$$



Además, la condición:  $\tau_Q^k|_{\mathcal{M}}$  es un *fibrado vectorial*, implica que la matriz de orden  $m \times nk$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v_1^1} \Big|_{w_q} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v_n^k} \Big|_{w_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial v_1^1} \Big|_{w_q} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial v_n^k} \Big|_{w_q} \end{pmatrix}$$

tiene rango máximo  $m$  en cada punto  $w_q \in \mathcal{M} \cap U$ .

### 3.1.2. El fibrado de las formas de ligadura.

En esta subsección introduciremos un fibrado  $F$ , de rango  $m$ , que jugará un papel similar al fibrado de las fuerzas de reacción de la Mecánica no-holonómica.

Definimos

$$F \subset \{\eta|_{\mathcal{M}} / \eta \in \Lambda^1(T_k^1 Q, \mathbb{R}^k)\}$$

como un subfibrado del fibrado de 1-formas en  $T_k^1 Q$  que son  $\mathbb{R}^k$ -valuadas. Imponemos a este subfibrado  $F$  las siguientes condiciones, que son únicamente de naturaleza técnica:

- (1)  $F$  tiene rango  $m$ , (obsérvese que  $m$  es la codimensión de la subvariedad de ligaduras).
- (2) Los elementos de  $F$  son 1-formas semibásicas, esto es, si  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^k)$  es un elemento de  $F$  entonces  $\eta$  se anula sobre los campos de vectores  $\tau_Q^k$ -verticales.

El fibrado  $F$  que acabamos de definir se llama **fibrado de las formas de ligadura**.

Consideremos un sistema local de coordenadas  $(q^i, v_A^i)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$  en  $T_k^1 Q$ . Podemos encontrar un recubrimiento abierto  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}$  tal que en cada conjunto abierto  $U \in \mathcal{U}$ ,  $F$  está generado por  $m$  1-formas,  $\eta_1, \dots, \eta_m$ ,  $\mathbb{R}^k$ -valuadas e independientes. Estas 1-formas se escriben localmente como sigue:

$$\eta_\alpha = (\eta_\alpha^1, \dots, \eta_\alpha^k) = (\eta_{\alpha i}^1 dq^i, \dots, \eta_{\alpha i}^k dq^i), \quad 1 \leq \alpha \leq m \quad (3.2)$$

donde  $\eta_{\alpha i}^A$  son funciones diferenciables definidas en  $\mathcal{M} \subset T_k^1 Q$ . La independencia de las formas  $\eta_\alpha$  implica que la  $m \times kn$ -matriz cuyas entradas son las funciones  $\eta_{\alpha i}^A$ , tiene rango constante máximo  $m$ .

**Observación 3.1** Una situación de especial interés se da cuando  $F$  está determinado por  $\mathcal{M}$  a través del denominado “Principio de Chetaev”, es decir, *si la subvariedad de ligaduras  $\mathcal{M}$  viene dada por la anulación de  $m$  funciones independientes  $\Phi_\alpha$  en  $T_k^1 Q$ ,  $F$  está generado por la familia de 1-formas  $\mathbb{R}^k$ -valuadas y semibásicas:*

$$\eta_\alpha = (J^{1*}(d\Phi_\alpha), \dots, J^{k*}(d\Phi_\alpha)) = \left( \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_1^i} dq^i, \dots, \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_k^i} dq^i \right), \quad 1 \leq \alpha \leq m,$$

donde  $\{J^1, \dots, J^k\}$  denota la estructura  $k$ -tangente de  $T_k^1 Q$  definida en (1.24).

En esta situación y considerando el caso particular  $k = 1$  obtenemos que el fibrado  $F$  está generado por  $J^* d\Phi_\alpha$ , esto es, las formas de ligadura o fuerzas de reacción de la Mecánica lagrangiana no-holónica, véase M. de León, D. Martín de Diego y A. Santamaría-Merino, [75]. Por este motivo hemos denominado al fibrado  $F$ , fibrado de formas de ligadura.

◇

### 3.1.3. La distribución de ligaduras.

En este apartado, mostraremos que el fibrado de formas de ligadura  $F$  nos permite definir una distribución  $\mathcal{S}$ , a lo largo de  $\mathcal{M}$ , llamada la *distribución de ligaduras*.

En la subsección 3.2 haremos uso de esta distribución para poder definir un proyector que nos permitirá obtener las soluciones del sistema con ligaduras como la proyección de las soluciones del sistema libre.

Como vimos en el apartado anterior, suponemos que el fibrado de formas de ligadura,  $F$ , está generado por  $m$  1-formas,  $\eta_\alpha = (\eta_\alpha^1, \dots, \eta_\alpha^k)$ ,  $1 \leq \alpha \leq m$ , que son  $\mathbb{R}^k$ -valuadas y semibásicas. La expresión local de estas 1-formas está dada en (3.2).

En primer lugar introducimos el siguiente morfismo de fibrados vectoriales

$$\begin{aligned} \Omega_L^b : T(T_k^1 Q) &\longrightarrow (T_k^1)^*(T_k^1 Q) \\ X &\mapsto \Omega_L^b(X) = (\iota_X \omega_L^1, \dots, \iota_X \omega_L^k). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para cada  $\alpha$ , ( $\alpha = 1, \dots, m$ ), sea  $Z_\alpha \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$  el único campo de vectores en  $T_k^1 Q$  definido a partir de las siguientes identidades:

$$(\tau_Q^k)_*(Z_\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \Omega_L^b(Z_\alpha) = -\eta_\alpha, \quad (3.4)$$

o equivalentemente por

$$(\tau_Q^k)_*(Z_\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \iota_{Z_\alpha} \omega_L^A = -\eta_\alpha^A, \quad 1 \leq A \leq k.$$

Si  $Z_\alpha$  se escribe localmente como sigue:

$$Z_\alpha = (Z_\alpha)^j \frac{\partial}{\partial q^j} + (Z_\alpha)_B^j \frac{\partial}{\partial v_B^j}$$

entonces, de la expresión local (1.33) de  $\omega_L^A$ , se deduce que (3.4) es equivalente a

$$(Z_\alpha)^i = 0, \quad (Z_\alpha)_B^j \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} = \eta_{\alpha i}^A.$$

Teniendo en cuenta que el lagrangiano  $L$  es regular, las funciones  $(Z_\alpha)_B^j$  quedan determinadas unívocamente. De este modo se obtiene

$$Z_\alpha = W_{AB}^{ij} \eta_{\alpha i}^A \frac{\partial}{\partial v_B^j},$$

donde  $(W_{AB}^{ij})$  denota la matriz inversa de la matriz  $\left( \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j} \right)$ .

A partir de la expresión de los campos de vectores  $Z_\alpha$  y de la regularidad del lagrangiano  $L$  se comprueba inmediatamente que la independencia de las 1-formas  $\mathbb{R}^k$ -valuadas  $\eta_1, \dots, \eta_m$  implica que los campos de vectores  $Z_1, \dots, Z_m$  son linealmente independientes. Por tanto generan una distribución

$$\mathcal{S} = \langle Z_1, \dots, Z_m \rangle,$$

de dimensión  $m$ . Llamaremos a  $\mathcal{S}$  la **distribución de ligaduras** asociada a  $\mathcal{M}$  y  $F$ .

### 3.1.4. Las ecuaciones de campo no-holonómicas

En esta subsección vamos a describir las ecuaciones de campo no-holonómicas en el fibrado tangente de las  $k^1$ -velocidades  $T_k^1 Q$  de una variedad  $Q$ .

Resumiendo lo visto por el momento, estamos trabajando en una teoría de campos no-holonómicos construida sobre los siguientes objetos:

- (i) un lagrangiano regular  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ ;

- (ii) una subvariedad de ligaduras  $\mathcal{M} \hookrightarrow T_k^1 Q$ ;
- (iii) un fibrado  $F$  de formas de ligadura y la distribución de ligaduras inducida  $\mathcal{S}$ , ambos objetos definidos a lo largo de  $\mathcal{M}$ .

Para completar nuestro modelo de teoría lagrangiana de campos no-holonómicos tenemos que especificar las ecuaciones de campo. Comenzaremos esta subsección introduciendo una generalización del principio de d'Alembert que nos permite obtener dichas ecuaciones.

A. El principio de d'Alembert.

Binz *et al* en [9] obtienen las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange no-holonómicas, en el contexto multisimpléctico, a partir de un principio variacional.

Ahora procedemos de un modo análogo para obtener las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange no-holonómicas.

Recordemos que en la sección 1.2.4.B demostramos que, en el contexto sin ligaduras, una aplicación  $\phi: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es un extremal de la acción

$$\mathcal{J}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^k} (L \circ \phi^{(1)}(t)) d^k t$$

si, y sólo si,

$$\int_{\mathbb{R}^k} ((\mathcal{L}_{Z^C} L) \circ \phi^{(1)})(t) d^k t = 0$$

para todo campo de vectores  $Z$  en  $Q$  cuyo flujo  $\sigma_s$  verifique  $\sigma_s(q) = q$  para todo  $q$  en la frontera de  $\phi(U_0)$ .

Ahora, considerando ligaduras introducimos la siguiente definición:

**Definición 3.2** Una aplicación  $\phi: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  con soporte compacto, definida en un conjunto abierto  $U_0 \subset Q$ , es una **solución del problema con ligaduras**, que estamos considerando, si  $\phi^{(1)}(U_0) \subset \mathcal{M}$  y

$$\int_{U_0} ((\mathcal{L}_{Z^C} L) \circ \phi^{(1)})(\mathbf{t}) d^k \mathbf{t} = 0,$$

para cada campo de vectores  $Z$  en  $Q$  que se anule en la frontera de  $\phi(U_0)$  y tal que

$$\iota_{Z^C} \eta = 0 \tag{3.5}$$

para cada  $\eta \in F$ .

Consideremos un sistema local de coordenadas en el que

$$Z = Z^i \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Teniendo en cuenta la expresión local (1.37) del levantamiento completo  $Z^C$ , se comprueba sin dificultad que la condición (3.5) es equivalente a

$$\eta_{\alpha i}^A Z^i = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq m, \quad 1 \leq A \leq k, \quad (3.6)$$

donde  $\eta_{\alpha i}^A$  son los coeficientes de las formas de ligadura que generan  $F$  y que han sido introducidas en (3.2).

Mediante un cálculo análogo al realizado en la demostración de la Proposición 1.47 se obtiene que,  $\phi(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t}))$  es una solución del problema con ligaduras si, y sólo si,

$$\int_{U_0} \left[ \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right] (Z^i \circ \phi)(\mathbf{t}) d^k \mathbf{t} = 0,$$

para todo de  $Z^i$  verificando (3.6).

Por tanto, una aplicación  $\phi: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es solución del problema con ligaduras si y sólo si satisface el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} - \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) &= \lambda_A^\alpha \eta_{\alpha i}^A(\phi^{(1)}(\mathbf{t})) \quad (i = 1, \dots, n), \\ \Phi_\alpha(\phi^{(1)}(\mathbf{t})) &= 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (3.7)$$

en el que la última familia de ecuaciones significa que la primera prolongación  $\phi^{(1)}$  de  $\phi$  toma valores en la subvariedad de ligaduras  $\mathcal{M}$ .

Como es usual, las “a priori” funciones desconocidas  $\lambda_A^\alpha$  juegan el papel de los “multiplicadores de Lagrange”. Las ecuaciones (3.7) se llaman las **ecuaciones de campo lagrangianas no-holonómicas** para el problema con ligaduras.

**Observación 3.3** Si el fibrado  $F$ , de las formas de ligadura, se define de acuerdo con el “principio de Chetaev”, (véase observación 3.1), reobtenemos las ecuaciones de campo no-holonómicas obtenidas por E. Binz, M. de León, D. Martín de Diego y D. Socolescu en [9].

Un estudio análogo, en el contexto multisimpléctico, fue realizado por J. Vankerschaver, F. Cantrijn, M. de León y D. Martín de Diego en [138].

## B. Descripción geométrica de las ecuaciones de campo lagrangianas no-holonómicas.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega_L^A - dE_L \in \langle \eta_\alpha^B \rangle, \quad X_A|_{\mathcal{M}} \in T\mathcal{M}, \quad 1 \leq A \leq k \quad (3.8)$$

a lo largo de  $\mathcal{M}$ , donde  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  es un campo de  $k$ -vectores en  $T_k^1 Q$  definido a lo largo de  $\mathcal{M}$ , esto es, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & T_k^1(T_k^1 Q) \\ & \nearrow \mathbf{X} & \downarrow \tau_{T_k^1 Q}^k \\ \mathcal{M} & \hookrightarrow & T_k^1 Q \end{array}$$

Se verifica el siguiente resultado que nos permite denominar a las ecuaciones (3.8) como **ecuaciones geométricas lagrangianas no-holonómicas**.

**Proposición 3.4** *Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  un campo de  $k$ -vectores en  $T_k^1 Q$  definido a lo largo de  $\mathcal{M}$ , integrable y solución de (3.8). Entonces*

- (i)  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  es un SOPDE.
- (ii) Si  $\phi^{(1)}(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t}), \partial\phi^i/\partial t^A(\mathbf{t}))$  es una sección integral de  $\mathbf{X}$  entonces  $\phi$  es solución de las ecuaciones de campo lagrangianas no-holonómicas (3.7).

*Demostración:*

Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  un campo de  $k$ -vectores en  $T_k^1 Q$  definido a lo largo de  $\mathcal{M}$ , integrable y solución de (3.8). Teniendo en cuenta que  $\eta_\alpha^B = \eta_{\alpha_i}^B dq^i$ , (véase (3.2)) se obtiene que la primera ecuación de (3.8) se puede escribir como sigue:

$$\sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega_L^A - dE_L = \lambda_B^\alpha \eta_{\alpha_i}^B dq^i, \quad (3.9)$$

donde  $E_L = \Delta L - L$ .

Supongamos que cada  $X_A$  se expresa localmente como sigue

$$X_A = (X_A)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_A)^i_B \frac{\partial}{\partial v_B^i},$$

donde  $(X_A)^i, (X_A)^i_B$  con  $1 \leq A, B \leq k$  y  $1 \leq i \leq n$  son funciones definidas en  $\mathcal{M}$ .

Entonces  $(X_1, \dots, X_k)$  es una solución de (3.9) si, y sólo si, las funciones  $(X_A)^i$  y  $(X_A)^i_B$  satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_A^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \right) ((X_A)^j - v_A^j) \\ & - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} (X_A)^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} (X_A)^j_B - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) = \lambda_B^\alpha \eta_{\alpha i}^B, \\ & \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} ((X_A)^i - v_A^i) = 0. \end{aligned}$$

Puesto que el lagrangiano es regular, de la última ecuación se obtiene

$$(X_A)^j = v_A^j,$$

esto es  $(X_1, \dots, X_k)$  es un SOPDE, y las ecuaciones anteriores son equivalentes a las siguientes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} v_A^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j} (X_A)^j_B - \frac{\partial L}{\partial q^i} &= -\lambda_B^\alpha \eta_{\alpha i}^B \quad (i = 1, \dots, n) \\ (X_A)^i &= v_A^i \quad (A = 1, \dots, k). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ahora probaremos (ii).

Sea  $\phi^{(1)}(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t}), \partial \phi^i / \partial t^A(\mathbf{t}))$  una sección integral de  $(X_1, \dots, X_k)$  pasando por un punto  $w_{\mathbf{q}} \in \mathcal{M}$ , esto es,

$$\phi^{(1)}(0) = w_{\mathbf{q}} \in \mathcal{M}, \quad (v_A^j \circ \phi^{(1)})(\mathbf{t}) = \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, \quad ((X_A)^j_B \circ \phi^{(1)})(\mathbf{t}) = \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}}. \quad (3.11)$$

Sustituyendo (3.11) en el primer grupo de ecuaciones de (3.10) obtenemos las ecuaciones

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} = -\lambda_B^\alpha \eta_{\alpha i}^B(\phi^{(1)}(t)) \quad (i = 1, \dots, n),$$

que son el primer grupo de las ecuaciones de campo lagrangianas no-holónicas introducidas en (3.7).

Finalmente, de (3.11) y puesto que  $X_A|_{\mathcal{M}} \in T\mathcal{M}$  se tiene

$$0 = X_A(\Phi_\alpha) = v_A^i \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q^i} + (X_A)^j_B \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_B^j}$$

y en particular evaluando la función anterior en  $\phi^{(1)}(\mathbf{t}) \in T_k^1 Q$  se obtiene

$$0 = X_A(\Phi_\alpha)\phi^{(1)}(\mathbf{t}) = \left. \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} \left. \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q^i} \right|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \left. \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \right|_{\mathbf{t}} \left. \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_B^j} \right|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} = \left. \frac{\partial (\Phi_\alpha \circ \phi^{(1)})}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}}$$

entonces  $\Phi_\alpha \circ \phi^{(1)}$  es una función constante. Puesto que  $\phi^{(1)}(0) \in \mathcal{M}$  se obtiene  $\Phi_\alpha(\phi^{(1)}(0)) = 0$  y así

$$\Phi_\alpha(\phi^{(1)}(\mathbf{t})) = 0,$$

por tanto se verifica el segundo grupo de las ecuaciones (3.7).

Así, se obtiene que  $\phi$  es solución de las ecuaciones de campo lagrangianas no-holónicas (3.7).

□

## 3.2. El proyector no-holónico.

La finalidad de esta sección es mostrar que para una teoría de campos de primer orden no-holónica, en el sentido descrito en la sección anterior, se puede construir, bajo cierta condición adicional, un operador proyección que lleva soluciones de la ecuación (1.45) para el problema lagrangiano sin ligaduras en soluciones de las ecuaciones geométricas no-holónicas (3.8).

Como se describió en la sección anterior, consideramos un *problema con ligaduras* con Lagrangiano regular  $L$ , variedad de ligaduras  $\mathcal{M} \subset T_k^1 Q$  y distribución de ligaduras  $\mathcal{S}$ . Ahora imponemos la siguiente **condición de compatibilidad**: para cada  $w_{\mathbf{q}} \in \mathcal{M}$

$$T_{w_{\mathbf{q}}} \mathcal{M} \cap \mathcal{S}(w_{\mathbf{q}}) = \{0\}. \quad (3.12)$$



Si  $\mathcal{M}$  está definida localmente por las  $m$  ecuaciones  $\Phi_\alpha(q^i, v_A^i) = 0$  y, si  $\mathcal{S}$  está localmente generada por los campos de vectores  $Z_\alpha$  (véase Subsección 3.1.3), un cálculo directo nos permite afirmar la siguiente caracterización de la condición de compatibilidad:

**Proposición 3.5** *La condición de compatibilidad es equivalente a la regularidad de la matriz*

$$\left( Z_\alpha(\Phi_\beta)(w_{\mathbf{q}}) \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq m}$$

en cada punto  $w_{\mathbf{q}} \in \mathcal{M}$ .

*Demostración:*

Sea  $v \in T_{w_{\mathbf{q}}} \mathcal{M} \cap \mathcal{S}(w_{\mathbf{q}})$  entonces:

- (i)  $v \in \mathcal{S}(w_{\mathbf{q}})$  y  $\mathcal{S}(w_{\mathbf{q}}) = \langle Z_1(w_{\mathbf{q}}), \dots, Z_m(w_{\mathbf{q}}) \rangle$  entonces  $v = v^\alpha Z_\alpha(w_{\mathbf{q}})$ , para algunos coeficientes  $v^\alpha$ .
- (ii)  $v \in T_{w_{\mathbf{q}}} \mathcal{M}$  entonces

$$0 = v(\Phi_\beta) = v^\alpha Z_\alpha(\Phi_\beta)(w_{\mathbf{q}}), \quad 1 \leq \beta \leq m. \quad (3.13)$$

Supongamos que la matriz  $\left( Z_\alpha(\Phi_\beta)(w_{\mathbf{q}}) \right)$  es regular, entonces de (3.13) se obtiene que  $v^\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$  y por tanto  $v = 0$ . Esto es, la condición de compatibilidad se verifica.

Recíprocamente, suponemos ahora que la condición de compatibilidad se tiene. Si la matriz  $\left( Z_\alpha(\Phi_\beta)(w_{\mathbf{q}}) \right)$  no es regular, entonces existe algún vector  $v = v^\alpha Z_\alpha(w_{\mathbf{q}}) \neq 0$  verificando  $v(\Phi_\beta) = 0$ ,  $1 \leq \beta \leq m$  y por tanto  $v \in T_{w_{\mathbf{q}}} \mathcal{M} \cap \mathcal{S}(w_{\mathbf{q}}) = \{0\}$ . Obtendremos así a una contradicción que parte de suponer que la matriz  $\left( Z_\alpha(\Phi_\beta)(w_{\mathbf{q}}) \right)$  no es regular. Así, la condición de compatibilidad implica la regularidad de  $\left( Z_\alpha(\Phi_\beta)(w_{\mathbf{q}}) \right)$ .

□

Como veremos a continuación, la condición de compatibilidad nos permite definir una descomposición del tangente a  $T_k^1 Q$  en los puntos de la subvariedad de ligaduras  $\mathcal{M}$ .

**Proposición 3.6** *Si se verifica la condición de compatibilidad (3.12), entonces en cada punto  $w_{\mathbf{q}} \in \mathcal{M}$  se obtiene la descomposición*

$$T_{w_{\mathbf{q}}}(T_k^1 Q) = T_{w_{\mathbf{q}}} \mathcal{M} \oplus \mathcal{S}(w_{\mathbf{q}}). \quad (3.14)$$

*Demostración:*

La demostración es una consecuencia directa de la condición de compatibilidad (3.12) y un simple cálculo de dimensiones:

$$\begin{aligned} \dim T_{w_{\mathbf{q}}} \mathcal{M} \oplus \mathcal{S}(w_{\mathbf{q}}) &= \dim T_{w_{\mathbf{q}}} \mathcal{M} + \dim \mathcal{S}(w_{\mathbf{q}}) \\ &= (n + nk - m) + m = n + nk = \dim T_{w_{\mathbf{q}}}(T_k^1 Q). \end{aligned}$$

□

La descomposición en suma directa de la proposición anterior nos permitirá introducir dos operadores proyección pero antes introducimos la siguiente notación:  $T_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q)$  denota la restricción de  $T(T_k^1 Q)$  a la subvariedad  $\mathcal{M}$  de  $T_k^1 Q$ , esto es,

$$T_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q) := \bigcup_{w_{\mathbf{q}} \in \mathcal{M}} T_{w_{\mathbf{q}}}(T_k^1 Q).$$

La descomposición en suma directa de  $T_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q)$  dada por (3.14) determina dos operadores proyección complementarios  $P$  y  $Q$ :

$$P : T_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q) \rightarrow T\mathcal{M}, \quad Q = I - P : T_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q) \rightarrow \mathcal{S},$$

donde  $I$  es la identidad en  $T_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q)$ .

Los proyectores  $P$  y  $Q$  se escriben localmente como sigue:

$$P = I - \mathcal{C}^{\alpha\beta} Z_{\alpha} \otimes d\Phi_{\beta}, \quad Q = \mathcal{C}^{\alpha\beta} Z_{\alpha} \otimes d\Phi_{\beta},$$

donde  $(\mathcal{C}^{\alpha\beta})$  es la inversa de la matriz  $(\mathcal{C}_{\alpha\beta})$  y las entradas de esta matriz son

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta} := d\Phi_{\alpha}(Z_{\beta}) = Z_{\beta}(\Phi_{\alpha}).$$

Consideremos la restricción de  $T_k^1(T_k^1 Q)$  a la subvariedad de ligaduras  $\mathcal{M}$ , que denotaremos como se indica a continuación:

$$(T_k^1)_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q) := T_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q) \oplus \overset{k}{\cdot} \cdot \oplus T_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q).$$

La descomposición en suma directa de  $T_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q)$ , definida puntualmente en (3.14), determina la siguiente descomposición, definida a lo largo de  $\mathcal{M}$  :

$$(T_k^1)_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q) = T_k^1 \mathcal{M} \oplus \mathfrak{S} \quad (3.15)$$

donde  $\mathfrak{S}$  se define como la suma de Whitney, sobre  $\mathcal{M}$ , de  $k$ -copias de  $\mathcal{S}$ , esto es,

$$\mathfrak{S} = \mathcal{S} \oplus \dots \oplus \mathcal{S}.$$

Teniendo en cuenta que una base local de  $\mathcal{S}$  está formada por la familia de  $m$  campos de vectores independientes  $\{Z_1, \dots, Z_m\}$  definidos por las ecuaciones (3.4), entonces el conjunto de  $k$ -tuplas

$$\{(Z_\alpha, 0, \dots, 0), (0, Z_\alpha, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, Z_\alpha), \}_{1 \leq \alpha \leq m}$$

es una base local de  $\mathfrak{S}$ .

La descomposición en suma directa de  $(T_k^1)_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q)$ , dada en (3.15), determina dos nuevos operadores proyección,  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ , complementarios entre sí:

$$\mathcal{P} : (T_k^1)_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 \mathcal{M}, \quad \mathcal{Q} : (T_k^1)_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q) \rightarrow \mathfrak{S},$$

definidos por

$$\mathcal{P}(X_{1w_{\mathbf{q}}}, \dots, X_{kw_{\mathbf{q}}}) = (P(X_{1w_{\mathbf{q}}}), \dots, P(X_{kw_{\mathbf{q}}})) \quad \text{y} \quad \mathcal{Q} = \mathcal{I} - \mathcal{P},$$

en donde  $\mathcal{I}$  es la identidad en  $(T_k^1)_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q)$ .

**Proposición 3.7** *Sea  $X_L = (X_L^1, \dots, X_L^k)$  una solución del problema lagrangiano libre, i.e.,  $X_L$  es solución de las ecuaciones geométricas de Euler-Lagrange (1.45), entonces  $X_{L, \mathcal{M}} := \mathcal{P}(X_L|_{\mathcal{M}})$  es una solución del problema lagrangiano con ligaduras, esto es, es solución de las ecuaciones geométricas lagrangianas no-holonómicas (3.8).*

*Demostración:*

Por definición del operador  $\mathcal{P}$ , sabemos que

$$\mathcal{P}(X_L|_{\mathcal{M}}) = (P(X_L^1|_{\mathcal{M}}), \dots, P(X_L^k|_{\mathcal{M}}))$$

y además

$$P(X_L^A|_{\mathcal{M}}) \in T\mathcal{M}.$$

Entonces,  $\left(P(X_L^1|_{\mathcal{M}}), \dots, P(X_L^k|_{\mathcal{M}})\right)$  es una solución de las ecuaciones geométricas lagrangianas no-holónicas (3.8) si, y sólo si,

$$\sum_{A=1}^k \imath_{P(X_L^A|_{\mathcal{M}})} \omega_L^A - dE_L \in \langle \eta_\alpha^A \rangle_{1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq A \leq k}.$$

Para probar la relación anterior utilizaremos que  $X_L$  es solución de la ecuación geométrica de Euler-Lagrange (1.45) y la expresión (3.4) que define los campos de vectores  $Z_\alpha$ . En efecto

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k \imath_{P(X_L^A|_{\mathcal{M}})} \omega_L^A - dE_L &= \sum_{A=1}^k \imath_{X_L^A|_{\mathcal{M}} - Q(X_L^A|_{\mathcal{M}})} \omega_L^A - dE_L \\ &= - \sum_{A=1}^k \imath_{Q(X_L^A|_{\mathcal{M}})} \omega_L^A = - \sum_{A=1}^k \imath \lambda_A^\alpha Z_\alpha \omega_L^A = - \sum_{A=1}^k \lambda_A^\alpha \imath_{Z_\alpha} \omega_L^A \\ &= \sum_{A=1}^k \lambda_A^\alpha \eta_\alpha^A \in \langle \eta_\alpha^A \rangle. \end{aligned}$$

Así se obtiene que  $X_{L,\mathcal{M}} = \left(P(X_L^1|_{\mathcal{M}}), \dots, P(X_L^k|_{\mathcal{M}})\right)$  es una solución de (3.8).

□

**Observación 3.8** En el caso particular  $k = 1$ , correspondiente a la Mecánica lagrangiana Autónoma, los resultados de esta sección pueden encontrarse en el trabajo de M. de León, J. C. Marrero y D. Martín de Diego [69].

◇

### 3.3. La ecuación momento no-holónica

En esta sección a cada *simetría lagrangiana no-holónica* le asociamos cierta ecuación en derivadas parciales que debe satisfacer toda solución del problema no-holónico satisface. Esta ecuación se llama ecuación momento no-holónica y juega el papel de las leyes de conservación en el caso en el que no hay ligaduras.

Sea  $G$  un grupo de Lie y  $\mathfrak{g}$  su álgebra de Lie. Consideremos una acción

$$\Phi: G \times Q \rightarrow Q$$

entonces el grupo de Lie  $G$  actúa sobre el fibrado tangente de las  $k^1$ -velocidades  $T_k^1 Q$  por prolongación de  $\Phi$ , esto es,

$$T_k^1 \Phi_g(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = ((T_{\mathbf{q}} \Phi_g)(v_{1\mathbf{q}}), \dots, (T_{\mathbf{q}} \Phi_g)(v_{k\mathbf{q}})),$$

donde para cada  $g \in G$  se tiene una aplicación

$$T_k^1 \Phi_g: T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q.$$

### Definición 3.9

- (1) Decimos que el lagrangiano  $L$  es **invariante** bajo la acción del grupo  $G$  si  $L$  es invariante bajo la acción inducida de  $G$  sobre  $T_k^1 Q$ , i.e.,  $(T_k^1 \Phi_g)^* L = L$ , para todo  $g \in G$ .
- (2) Decimos que el lagrangiano  $L$  es **infinitesimalmente invariante** si para cualquier elemento del álgebra de Lie  $\xi \in \mathfrak{g}$  se verifica

$$\xi_Q^C(L) = 0,$$

donde  $\xi_Q^C$  denota el levantamiento completo del campo de vectores fundamental  $\xi_Q$  definido por

$$\xi_Q(\mathbf{q}) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Phi(\exp(s\xi), \mathbf{q}) \quad \mathbf{q} \in Q.$$

Cuando  $\xi_Q^C(L) = 0$ , entonces  $\xi_Q$  será llamado una **simetría infinitesimal lagrangiana**.

Supongamos que  $G$  deja invariante  $L$ ,  $\mathcal{M}$  y  $F$  (esto es, los elementos que determinan nuestro modelo de teoría de campos no-holonómicos):

$$L \circ T_k^1 \Phi_g = L, \quad T_k^1 \Phi_g(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M} \quad \text{and} \quad (T_k^1 \Phi_g)^*(F) \subset F$$

para todo  $g \in G$ .

**Definición 3.10** Definimos un fibrado vectorial  $\mathfrak{g}^F \rightarrow Q$  del siguiente modo: para cada  $\mathbf{q} \in Q$  se denota por  $\mathfrak{g}^F(\mathbf{q})$  el subespacio lineal de  $\mathfrak{g}$  dado por:

$$\mathfrak{g}^F(\mathbf{q}) = \{\xi \in \mathfrak{g} / \eta(\xi_Q^C)(w_{\mathbf{q}}) = 0 \text{ para todo } \eta \in F \text{ y } w_{\mathbf{q}} \in \mathcal{M} \cap (\tau_Q^k)^{-1}(\mathbf{q})\},$$

y se define

$$\mathfrak{g}^F := \bigcup_{\mathbf{q} \in Q} \mathfrak{g}^F(\mathbf{q}) \subset \mathfrak{g}.$$

A cada sección  $\tilde{\xi}$  de  $\mathfrak{g}^F \rightarrow Q$ , le podemos asociar un campo de vectores  $\tilde{\xi}_Q$  en  $Q$  de acuerdo con la siguiente definición:

$$\tilde{\xi}_Q(\mathbf{q}) := [\tilde{\xi}(\mathbf{q})]_Q(\mathbf{q}). \quad (3.16)$$

**Definición 3.11** Para cada  $A$  ( $A = 1, \dots, k$ ), la  $A$ -ésima componente  $(J^{nh})^A$  de la aplicación momento no-holonómica es la aplicación

$$(J^{nh})^A : \mathcal{M} \rightarrow (Sec(\mathfrak{g}^F))^*$$

construida como sigue:

Sea  $\tilde{\xi} : Q \rightarrow \mathfrak{g}^F$  cualquier sección de  $\mathfrak{g}^F$ , entonces definimos la aplicación  $(J^{nh})_{\tilde{\xi}}^A$  a lo largo de  $\mathcal{M}$  como sigue,

$$\begin{aligned} (J^{nh})_{\tilde{\xi}}^A : \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ w_{\mathbf{q}} &\mapsto (J^{nh})_{\tilde{\xi}}^A(w_{\mathbf{q}}) = (J^{nh})^A(w_{\mathbf{q}})(\tilde{\xi}(\mathbf{q})) = (\iota_{\tilde{\xi}_Q} \theta_L^A)(w_{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde  $\tilde{\xi}_Q$  es el campo de vectores asociado a  $\tilde{\xi}$  definido en (3.16).

**Observación 3.12** En el caso particular  $k = 1$ , correspondiente con la Mecánica Clásica Autónoma, la definición anterior coincide con la definición de la aplicación momento no-holonómica introducida por Marsden *et al* en [11].

**Observación 3.13** La aplicación  $(J^{nh})_{\tilde{\xi}}^A$  es la versión no-holonómica de la  $A$ -ésima componente  $\hat{J}(0, \dots, \overset{A}{\xi}, \dots, 0) = \theta_L^A(\xi_{T_k^1 Q})$ , de la aplicación momento en la variedad polisimplética  $T_k^1 Q$ , definida por F. Munteanu *et al.* en [107], cuando consideramos la estructura polisimplética definida a partir de  $\omega_L^A = -d\theta_L^A$ ,  $1 \leq A \leq k$ .

La importancia de la aplicación momento no-holonómica se encuentra en la ecuación momento no-holonómica, que introduciremos a continuación.

### Definición 3.14

- (1) Una **simetría lagrangiana no-holonómica** es una sección  $\tilde{\xi} : Q \rightarrow \mathfrak{g}^F$  de  $\mathfrak{g}^F$  tal que  $\tilde{\xi}_Q^C(L) = 0$ .
- (2) Una **simetría no-holonómica horizontal** es una sección constante de  $\mathfrak{g}^F$  que es una simetría lagrangiana no-holonómica.

**Teorema 3.15** Si  $\phi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es una solución de las ecuaciones de campo lagrangianas no-holonómicas (3.7), entonces para cualquier simetría lagrangiana no-holonómica  $\tilde{\xi}$  las componentes  $(J^{nh})_{\tilde{\xi}}^A$  ( $A = 1, \dots, k$ ), de la aplicación momento asociada a  $\tilde{\xi}$ , verifican la siguiente **ecuación momento no-holonómica**:

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( (J^{nh})_{\tilde{\xi}}^A(\phi^{(1)}(\mathbf{t})) \right) = \sum_{A=1}^k \iota_{(\tilde{\xi} \circ \phi)_*(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \theta_L^A(\phi^{(1)}(\mathbf{t})).$$

*Demostración:*

Puesto que  $\tilde{\xi} : Q \rightarrow \mathfrak{g}^F \subset \mathfrak{g}$  es una simetría lagrangiana no-holonómica se verifica

$$\tilde{\xi}_Q^C(L) = 0,$$

siendo  $\tilde{\xi}_Q$  el campo de vectores en  $Q$  definido en (3.16).

Consideremos un sistema local de coordenadas tal que

$$\tilde{\xi}_Q(\phi(t)) := [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q(\phi(t)) = \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\phi(\mathbf{t})}.$$

Entonces por ser  $\phi$  solución de las ecuaciones lagrangianas no-holonómicas (3.7) y verificarse que  $\tilde{\xi}_Q^C(L) = 0$  obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= [\tilde{\xi}_Q^C(L)](\phi^{(1)}(\mathbf{t})) \\ &= \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} + \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\Phi^{(1)}(\mathbf{t})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i (\phi(\mathbf{t})) \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) + \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i (\phi(\mathbf{t})) \lambda_A^\alpha \eta_{\alpha i}^A (\phi^{(1)}(\mathbf{t})) \\
 &+ \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\Phi^{(1)}(\mathbf{t})} \\
 &= \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i (\phi(\mathbf{t})) \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) + \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\Phi^{(1)}(\mathbf{t})},
 \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que el segundo sumando es nulo como consecuencia de  $\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t})) \in \mathfrak{g}^F$ .

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i (\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) &= \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i (\phi(\mathbf{t})) \right) \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \\
 &+ \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i (\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right)
 \end{aligned}$$

sustituyendo en la expresión final de  $0 = \tilde{\xi}_Q^C(L)$  obtenemos lo que sigue:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i (\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \\
 &- \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i (\phi(\mathbf{t})) \right) \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\Phi^{(1)}(\mathbf{t})} \\
 &= \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( (J^{nh})_{\tilde{\xi}}^A (\phi^{(1)}(\mathbf{t})) \right) - \left( [(\tilde{\xi} \circ \phi)_* (\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right)]_Q \right)^i (\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\Phi^{(1)}(\mathbf{t})} \\
 &= \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( (J^{nh})_{\tilde{\xi}}^A (\phi^{(1)}(\mathbf{t})) \right) - \sum_{A=1}^k \imath_{(\tilde{\xi} \circ \phi)_* (\mathbf{t})} \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \theta_L^A (\phi^{(1)}(\mathbf{t}))
 \end{aligned}$$

obteniendo así el resultado buscado. En esta última cadena de identidades hemos utilizado la definición (3.17) de  $(J^{nh})_{\tilde{\xi}}^A$  y la identidad

$$\frac{\partial}{\partial t^A} \left( \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i (\phi(\mathbf{t})) \right) = \left( [(\tilde{\xi} \circ \phi)_* (\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right)]_Q \right)^i (\phi(\mathbf{t})) + \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})},$$



que demostraremos a continuación.

Sea  $(y^l)$  un sistema local de coordenadas en el grupo de Lie  $G$ , entonces  $\left\{\frac{\partial}{\partial y^l}\right\}_e$  es una base de  $\mathfrak{g}$ .

Para cada  $\mathbf{t} \in U_0$ , se verifica  $\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t})) \in \mathfrak{g}^F \subset \mathfrak{g}$  por lo que se escribe localmente como sigue

$$\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t})) = \tilde{\xi}^l(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial}{\partial y^l} \Big|_e$$

y así

$$\left([\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q\right)^i(\phi(\mathbf{t})) = (\Phi_{\phi(\mathbf{t})})_*(e)(\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))(q^i) = \tilde{\xi}^l(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial(q^i \circ \Phi_{\phi(\mathbf{t})})}{\partial y^l} \Big|_e. \quad (3.18)$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \left([\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q\right)^i(\phi(\mathbf{t})) \right) = \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \tilde{\xi}^l(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial(q^i \circ \Phi_{\phi(\mathbf{t})})}{\partial y^l} \Big|_e \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial(q^i \circ \Phi_{\phi(\mathbf{t})})}{\partial y^l} \Big|_e \right) + \tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial(q^i \circ \Phi_{\phi(\mathbf{t})})}{\partial y^l} \Big|_e \right) \\ &= \frac{\partial \tilde{\xi}^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial(q^i \circ \Phi_{\phi(\mathbf{t})})}{\partial y^l} \Big|_e + \tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial}{\partial y^l} \Big|_e \left( \frac{\partial}{\partial t^A} (q^i \circ \Phi_{\phi(\mathbf{t})}) \right) \\ &= \frac{\partial \tilde{\xi}^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial(q^i \circ \Phi_{\phi(\mathbf{t})})}{\partial y^l} \Big|_e + \tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial}{\partial y^l} \Big|_e \left( \frac{\partial(q^i \circ \Phi_{\phi(\mathbf{t})})}{\partial q^j} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \\ &= \frac{\partial \tilde{\xi}^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial(q^i \circ \Phi_{\phi(\mathbf{t})})}{\partial y^l} \Big|_e + \tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial}{\partial y^l} \Big|_e \left( \frac{\partial(q^i \circ \Phi_{\phi(\mathbf{t})})}{\partial q^j} \right) \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \\ &= \frac{\partial \tilde{\xi}^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial(q^i \circ \Phi_{\phi(\mathbf{t})})}{\partial y^l} \Big|_e + \tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial}{\partial q^j} \left( \frac{\partial(q^i \circ \Phi_{\phi(\mathbf{t})})}{\partial y^l} \Big|_e \right) \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \\ &= \left( [(\tilde{\xi} \circ \phi)_*(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right)]_Q \right)^i(\phi(\mathbf{t})) + \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial \left( [\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q \right)^i}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})}. \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que

$$\left([\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q\right)^i(\phi(\mathbf{t})) = \frac{\partial \tilde{\xi}^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial(q^i \circ \Phi_{\phi(\mathbf{t})})}{\partial y^l} \Big|_e$$

lo que se obtiene de modo análogo a (3.18), teniendo en cuenta que

$$[\tilde{\xi}(\phi(\mathbf{t}))]_Q = \frac{\partial \tilde{\xi}^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial}{\partial y^l} \Big|_e.$$

□

**Corolario 3.16** *Si  $\tilde{\xi}$  es una simetría no-holónica horizontal, entonces se tiene la siguiente ley de conservación:*

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( (J^{nh})_{\tilde{\xi}}^A \circ \phi^{(1)}(\mathbf{t}) \right) = 0.$$

**Observación 3.17** En el caso particular  $k = 1$ , los resultados de esta sección coinciden con los obtenidos por Marsden *et al.* en de la sección 4.2 de [11].

◇

## 3.4. Ejemplo y casos particulares.

En esta sección incluimos un ejemplo y describiremos algunos casos particulares del modelo de teoría de campos no-holónicos descrito en las secciones anteriores de este capítulo.

### 3.4.1. “Cosserat rods”(Barra Cosserat).

A continuación vamos a describir un ejemplo físico de campo con ligaduras no-holónicas. Este ejemplo puede encontrarse, dentro del marco que proporcionan las variedades multisimpléticas, en diversos trabajos de J. Vankerschaver, entre los que podemos citar [135] y [139].

Nosotros vamos a describir un modelo análogo en el marco  $k$ -simplético. El modelo básico es una barra Cosserat, esto es, un tipo especial de medio elástico. Esta barra se mueve en un plano horizontal, que se supone suficientemente irregular para que la barra ruede sin deslizarse.

La teoría de las *barras Cosserat* constituye una aproximación a la teoría tridimensional de deformaciones elásticas de cuerpos similares a barras. Esta teoría tiene su origen a principios del siglo XX de manos de los hermanos Cosserat y hoy en día es una parte fundamental de la teoría de la elasticidad no lineal. Una introducción a las teorías Cosserat de las barras elásticas puede encontrarse en [129, 136] y un desarrollo más detallado en [2]. Algunas de las aplicaciones de las barras Cosserat pueden encontrarse en robótica o en biología computacional para modelizar la mecánica de las moléculas de ADN [92].

Una barra Cosserat puede pensarse como un cuerpo deformable, largo y estrecho. Asumimos que su longitud es significativamente mayor que su radio lo que nos permite no tener que hablar de su volumen. Así podemos visualizar una barra Cosserat mediante una curva  $s \rightarrow \mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ , llamada *línea de centros* y en cada punto consideramos una base ortonormal  $\{\mathbf{d}_1(s), \mathbf{d}_2(s), \mathbf{d}_3(s)\}$  positivamente orientada y cuyos elementos se denominan *directores* y en la cual consideramos  $\mathbf{d}_3$  tangente a la línea de centros y por tanto  $\mathbf{d}_3 \equiv \mathbf{r}'$ .

Además en nuestro modelo suponemos que la línea de centros es una curva plana. El resultado es un campo lagrangiano de segundo orden que debemos modificar para obtener un modelo de primer orden al que aplicar los resultados de este capítulo.

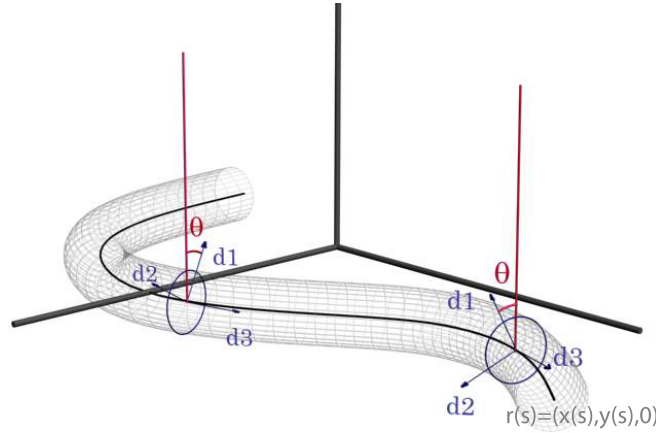


Figura 3.1: Barra Cosserat

Consideramos una barra Cosserat inextensible de longitud  $l$  equipada con tres directores. Si denotamos la línea de centros en el instante de tiempo  $t$  por  $s \mapsto \mathbf{r}(t, s)$ , la inextensibilidad permite asumir que el parámetro  $s$  es el parámetro longitud de arco.

Asumiendo que la línea de centros es una curva plana moviéndose en el plano horizontal se tiene  $r(t, s) = (x(t, s), y(t, s), 0)$ . Se define el ángulo  $\theta(t, s)$ , al que se denomina *torsión*, como el ángulo entre el eje  $e_z$  y  $d_1$ , véase la figura 3.1. Los vectores directores quedan completamente determinados a partir de la torsión  $\theta$  y un segundo parámetro  $\varphi$  denominado *pendiente* y que se define por  $(\cos\varphi, \sin\varphi) = (\frac{\partial x}{\partial s}(t, s), \frac{\partial y}{\partial s}(t, s))$ . Para más detalles véase [136] y referencias allí indicadas.

El modelo de segundo orden descrito en [135] se enmarca en la teoría multi-simplética desarrollada sobre  $J^1\pi$ , siendo  $\pi : Y \rightarrow X$ , donde  $X$  generalmente juega el papel del espacio-tiempo y las secciones del fibrado  $\pi$  son los campos en esta teoría. En este caso particular el espacio base  $X$  es  $\mathbb{R} \times [0, l]$  (tiempo y espacio), con coordenadas  $(t, s)$  y el espacio total  $Y$  es  $X \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ , con coordenadas  $(x, y, \theta)$  en la fibra. En este modelo, los campos nos dan las coordenadas de las líneas de centros  $(x(t, s), y(t, s))$  y el ángulo de torsión  $\theta(t, s)$ .

El lagrangiano que se considera en este modelo viene dado por

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\alpha}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(\beta(\theta')^2 + Kk^2),$$

donde  $k = (x'')^2 + (y'')^2$ , mientras que las ligaduras están dadas por

$$\dot{x} + R\dot{\theta}y' = 0 \quad \text{y} \quad \dot{y} - R\dot{\theta}x' = 0.$$

Aquí  $\rho, \alpha, \beta, K$  y  $R$  son parámetros reales y  $\dot{x} = \partial x / \partial t$ ,  $x' = \partial x / \partial s$  (análogo para  $y$  y  $\theta$ ). Este modelo es una simplificación matemática del problema físico real.

Para poder enmarcar este modelo en las teorías de campos  $k$ -simpléticas (teorías de primer orden), es necesario llevar a cabo un proceso de reducción del orden del problema para obtener un lagrangiano de primer orden. Para hacer esto introducimos dos nuevas variables  $z = x'$  y  $v = y'$  y obtenemos el lagrangiano modificado

$$L = \frac{\rho}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\alpha}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(\beta(\theta')^2 + K((z')^2 + (v')^2)) + \lambda(z - x') + \mu(v - y'),$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son los multiplicadores de Lagrange asociados a las ligaduras  $z = x'$  y  $v = y'$  que hemos impuesto. Este lagrangiano se puede pensar como una aplicación definida sobre  $T_2^1Q$  donde  $Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^4$ , y reescribiéndolo con la notación introducida en el capítulo 1 obtenemos un modelo 2-simplético de la barra Cosserat donde el lagrangiano  $L : T_2^1Q \rightarrow \mathbb{R}$  viene dado por

$$L = \frac{\rho}{2}((v_1^1)^2 + (v_1^2)^2) + \frac{\alpha}{2}(v_1^3)^2 - \frac{\beta}{2}(v_2^3)^2 - \frac{K}{2}((v_2^4)^2 + (v_2^5)^2) + q^6(q^4 - v_2^1) + q^7(q^5 - v_2^2)$$

sujeto a las ligaduras

$$v_1^1 + Rv_1^3v_2^2 = 0 \quad \text{y} \quad v_1^2 - Rv_1^3v_2^1 = 0. \quad (3.19)$$

Siguiendo el modelo descrito en [136, 135], el fibrado de formas de ligadura  $F$  está generado por las siguientes formas:

$$\eta_1 = (dq^1 + Rv_2^2dq^3, 0) \quad \text{y} \quad \eta_2 = (dq^2 - Rv_2^1dq^3, 0).$$

Reescribiendo las ecuaciones (3.7) para este caso particular se obtiene que las ecuaciones de campo asociadas a  $L$  son

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 \phi^1}{\partial t^1 \partial t^1} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial \phi^6}{\partial t^2} \Big|_{\mathbf{t}} = \lambda \\ \rho \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial t^1 \partial t^1} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial \phi^7}{\partial t^2} \Big|_{\mathbf{t}} = \mu \\ \alpha \frac{\partial^2 \phi^3}{\partial t^1 \partial t^1} \Big|_{\mathbf{t}} - \beta \frac{\partial^2 \phi^3}{\partial t^2 \partial t^2} \Big|_{\mathbf{t}} = R \left( \lambda \frac{\partial \phi^3}{\partial t^1} \Big|_{\mathbf{t}} - \mu \frac{\partial \phi^3}{\partial t^2} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \\ K \frac{\partial^2 \phi^4}{\partial t^2 \partial t^2} \Big|_{\mathbf{t}} + \phi^6(\mathbf{t}) = 0 \\ K \frac{\partial^2 \phi^5}{\partial t^2 \partial t^2} \Big|_{\mathbf{t}} + \phi^7(\mathbf{t}) = 0 \\ \phi^4(\mathbf{t}) - \frac{\partial \phi^1}{\partial t^2} \Big|_{\mathbf{t}} = 0 \\ \phi^5(\mathbf{t}) - \frac{\partial \phi^2}{\partial t^2} \Big|_{\mathbf{t}} = 0, \end{array} \right. \quad (3.20)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son los multiplicadores de Lagrange asociados con las ligaduras no-holonómicas,  $\mathbf{t} = (t^1, t^2) = (t, s)$  son las coordenadas tiempo y espacio y el campo  $\phi: U_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow Q$  nos da las coordenadas de la línea de centros  $(\phi^1(\mathbf{t}), \phi^2(\mathbf{t}))$  y el ángulo de torsión  $\phi^3(\mathbf{t})$ . Como uno puede observar en la ecuación (3.20) las componentes  $\phi^i$ ,  $i \geq 4$  son función de las componentes  $(\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ . Estas ecuaciones se complementan con las ecuaciones definidas por las ligaduras (3.19).

Consideremos la acción de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  en  $Q$  de acuerdo con la siguiente definición: para cada  $(a, b, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  consideramos la aplicación

$$\Phi_{(a,b,\theta)}(q^1, \dots, q^7) = (q^1 + a, q^2 + b, q^3 + \theta, q^4, \dots, q^7).$$

Es fácil comprobar que el siguiente campo de vectores se anula a lo largo de la forma de  $F$  en los puntos de la subvariedad de ligaduras  $\mathcal{M}$  definida por las ecuaciones (3.19):

$$\tilde{\xi} = -Rv_2^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + Rv_2^1 \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial q^3}.$$

Este campo de vectores generalizado se corresponde con la sección de  $\mathfrak{g}^F \rightarrow Q$  dada por  $\tilde{\xi} = (-Rv_2^2, Rv_2^1, 1, 0, 0, 0, 0)$ .

Como  $\tilde{\xi}(L) = 0$  el Teorema 3.15 se puede aplicar y obtenemos la *ecuación momento no-holónica* (véase [139])

$$R \left( \rho \frac{\partial^2 \phi^1}{\partial t^1 \partial t^1} - \frac{\partial \phi^6}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \phi^2}{\partial t^2} - R \left( \rho \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial t^1 \partial t^1} - \frac{\partial \phi^7}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \phi^1}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 \phi^3}{\partial t^1 \partial t^1} - \beta \frac{\partial^2 \phi^3}{\partial t^2 \partial t^2}.$$

Esta ley de conservación no-holónica también se puede obtener directamente de las ecuaciones no-holónicas sustituyendo las dos primeras ecuaciones en (3.20) en la tercera ecuación. Desafortunadamente, el conocer esta ley de conservación no-holónica no nos simplifica la resolución de las ecuaciones de campo.

**Observación 3.18** *La ecuación momento que hemos obtenido aquí es la misma que la obtenida para simetrías espaciales por M. Martín de Diego et al. en [139], dentro del marco multisimplético.*

### 3.4.2. Ligaduras holónicas.

Una distribución  $D$  en  $Q$  de codimensión  $m$  induce una subvariedad de ligaduras  $\mathcal{M} \hookrightarrow T_k^1 Q$  definida como sigue:  $(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})$  es un elemento de  $\mathcal{M}$  si  $v_{A\mathbf{q}} \in D(\mathbf{q})$  para cada  $A$  ( $A = 1, \dots, k$ ).

En coordenadas locales, si el anulador,  $D^0$ , de la distribución  $D$  está generado por las 1-formas en  $Q$ ,  $\varphi_\alpha = (\varphi_\alpha)_i dq^i$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ), entonces  $\mathcal{M}$  es el conjunto de soluciones de las  $mk$  ecuaciones

$$\Phi_\alpha^A(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq m, \quad 1 \leq A \leq k,$$

donde las  $mk$  funciones  $\Phi_\alpha^A \in \mathcal{C}^\infty(T_k^1 Q)$  están localmente dadas por:

$$\Phi_\alpha^A(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = [(\tau_Q^k)^* \varphi_\alpha](v_{A\mathbf{q}}) = (\varphi_\alpha)_i v_A^i.$$

Si la distribución  $D$  es integrable, las ligaduras inducidas por  $D$  se llaman *holonómicas*. En este caso,  $\phi^{(1)}$  toma valores en  $\mathcal{M}$  si, y sólo si,  $\phi$  toma valores en una hoja fija de la foliación inducida por  $D$ , y concluimos que las ligaduras pueden integrarse y obtener ligaduras en  $Q$ .

### 3.4.3. Ligaduras lineales.

A. La subvariedad de ligaduras  $\mathcal{M} = D_1 \oplus \dots \oplus D_k$ .

En este apartado vamos a considerar el caso de ligaduras lineales inducidas por distribuciones en  $Q$ .

Consideremos  $k$  distribuciones en  $Q$ ,  $D_1, \dots, D_k$ , y la *subvariedad de ligaduras*

$$\mathcal{M} = D_1 \oplus \dots \oplus D_k \subset T_k^1 Q$$

definida como la suma de Whitney sobre  $Q$  de las  $k$  distribuciones que se están considerando.

Si para cada  $A$ , ( $A = 1, \dots, k$ ), suponemos que  $D_A$  está definida por la anulación de  $m_A$  funciones independientes  $\varphi_{\alpha_A}$ ,  $1 \leq \alpha_A \leq m_A$ , definidas en  $Q$ , entonces, procediendo de modo similar al caso que se comentó anteriormente, se obtiene que los elementos de  $\mathcal{M}$  son las  $k$ -tuplas  $(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})$  de vectores tangentes a  $Q$  que son solución del sistema de  $m = m_1 + \dots + m_k$  ecuaciones

$$\Phi_{\alpha_A}^A(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = 0, \quad 1 \leq \alpha_A \leq m_A, \quad 1 \leq A \leq k,$$

donde

$$\Phi_{\alpha_A}^A(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = (\tau_Q^k)^* \varphi_{\alpha_A}(v_{A\mathbf{q}}) = (\varphi_{\alpha_A})_i v_A^i.$$

El *fibrado de formas de ligadura*,  $F$  que consideramos en este caso está generado por las  $m$  1-formas  $\mathbb{R}^k$ -valuadas

$$\eta_{\alpha_A}^A = \left( J^{1*}(d\Phi_{\alpha_A}^A), \dots, J^{k*}(d\Phi_{\alpha_A}^A) \right) = (0, \dots, (\tau_Q^k)^* \varphi_{\alpha_A}, \dots, 0),$$

definidas a lo largo de la subvariedad  $\mathcal{M}$ .

*Las ecuaciones de campo no-holonómicas:* Teniendo en cuenta la descripción de la subvariedad de ligaduras y el fibrado de las formas de ligadura, un cálculo directo

muestra que las ecuaciones de campo lagrangianas no-holónicas (3.7) se escriben en este caso particular como sigue:

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} = \lambda^{\alpha_A} (\varphi_{\alpha_A})_i(\phi(t)) \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$(\varphi_{\alpha_A})_i(\phi(t)) \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} = 0, \quad (1 \leq \alpha_A \leq m_A, 1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n).$$

**Observación 3.19** En el caso particular  $k = 1$ , estas ecuaciones coinciden con las ecuaciones del movimiento de la mecánica no holónica, (véase por ejemplo, [8, 75]).

◇

B. La subvariedad de ligaduras  $\mathcal{M} = D \oplus \dots \overset{k}{\oplus} D$ .

A continuación vamos a considerar el caso particular en el que las  $k$  distribuciones son iguales entre sí. Este caso tiene especial interés ya que nos permite extender el estudio realizado por Bates y Sniatycki [8], en la Mecánica no-holónica con ligaduras lineales, a la formulación  $k$ -simplética de las ecuaciones de campos no-holónicos.

Sea  $D$  una distribución en  $Q$ . Ahora consideramos la descripción realizada en el apartado A cuando  $D_1 = \dots = D_k = D$ . Como antes, si suponemos que  $D$  ha sido definida por la anulación de  $m$  funciones independientes  $\varphi_\alpha$  en  $Q$ , donde  $\varphi_\alpha(v_{\mathbf{q}}) = (\varphi_\alpha)_i v^i$ , entonces la subvariedad de ligaduras

$$\mathcal{M} = D \oplus \dots \overset{k}{\oplus} D$$

está formada por las  $k$ -tuplas  $(v_{1_{\mathbf{q}}}, \dots, v_{k_{\mathbf{q}}})$  de vectores tangentes a  $Q$  que son solución del sistema formado por las  $mk$  ecuaciones

$$\Phi_\alpha^A(v_{1_{\mathbf{q}}}, \dots, v_{k_{\mathbf{q}}}) = (\varphi_\alpha)_i v_A^i = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq A \leq k.$$

Denotaremos por  $D^v$  la distribución en  $T_k^1 Q$  definida localmente por

$$(D^v)^0 = \langle (\tau_Q^k)^* \varphi_\alpha \rangle_{\alpha=1, \dots, m},$$



donde  $(D^v)^0$  denota el anulador de  $D^v$  (véase los trabajos de M. de León [69, 73], para el caso  $k = 1$ ).

A continuación, probaremos dos resultados relativos a la distribución  $D^v$  que están relacionados con la existencia de un espacio  $k$ -simplético (véase el apéndice B para las definiciones técnicas).

**Lema 3.20** *Para cada punto  $w_{\mathbf{q}} \in \mathcal{M}$  se verifica que  $D_{w_{\mathbf{q}}}^v$  es un espacio vectorial  $k$ -coisotrópico en  $(T_{w_{\mathbf{q}}}(T_k^1 Q), \omega_L^1(w_{\mathbf{q}}), \dots, \omega_L^k(w_{\mathbf{q}}), V(w_{\mathbf{q}}))$ , es decir,  $(D^v)_{w_{\mathbf{q}}}^\perp \subset D_{w_{\mathbf{q}}}^v$ , siendo  $(D^v)_{w_{\mathbf{q}}}^\perp$  el ortogonal  $k$ -simplético de  $D_{w_{\mathbf{q}}}^v$  definido como sigue:*

$$(D^v)_{w_{\mathbf{q}}}^\perp = \{U_{w_{\mathbf{q}}} \in T_k^1 Q : \omega_L^A(U_{w_{\mathbf{q}}}, W_{w_{\mathbf{q}}}) = 0, \quad \forall \quad W_{w_{\mathbf{q}}} \in D_{w_{\mathbf{q}}}^v\}.$$

*Demostración:*

Teniendo en cuenta que  $(D^v)^0$  está localmente generado por las 1-formas semibásicas  $(\tau_Q^k)^* \varphi_\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq m$  deducimos

$$(D^v)_{w_{\mathbf{q}}}^\perp = S(w_{\mathbf{q}}) \subset V_{w_{\mathbf{q}}}(T_k^1 Q) \subset D_{w_{\mathbf{q}}}^v$$

para todo  $w_{\mathbf{q}} \in \mathcal{M}$ , donde  $V_{w_{\mathbf{q}}}(T_k^1 Q)$  denota la distribución vertical de  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$  en el punto  $w_{\mathbf{q}}$ .

□

**Proposición 3.21** *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

- (1) *La condición de compatibilidad se verifica, esto es,  $T\mathcal{M} \cap \mathcal{S} = \{0\}$ .*
- (2) *La distribución  $\mathfrak{D} = T\mathcal{M} \cap D^v$ , definida a lo largo de  $\mathcal{M}$ , es  $k$ -simplética en el fibrado vectorial  $k$ -simplético  $(T(T_k^1 Q), \omega_L^1, \dots, \omega_L^k, V)$ , esto es,  $\mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}} \cap \mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}}^\perp = \{0\}$  para cada  $\mathbf{q} \in Q$ .*

*Demostración:*

Si  $T\mathcal{M} \cap \mathcal{S} = \{0\}$  entonces

$$T\mathcal{M} \cap \mathcal{S} = T\mathcal{M} \cap (D^v)^\perp = 0$$

y

$$T_{w_{\mathbf{q}}}(T_k^1 Q) = T_{w_{\mathbf{q}}}\mathcal{M} \oplus (D^v)_{w_{\mathbf{q}}}^\perp \quad \forall w_{\mathbf{q}} \in \mathcal{M}.$$

Por tanto, del Lema 3.20 obtenemos

$$(D^v)_{w_{\mathbf{q}}} = (T_{w_{\mathbf{q}}} \mathcal{M} \cap (D^v)_{w_{\mathbf{q}}}) \oplus (D^v)_{w_{\mathbf{q}}}^\perp = \mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}} \oplus (D^v)_{w_{\mathbf{q}}}^\perp = \mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}} \oplus \mathcal{S}(w_{\mathbf{q}}).$$

Así, mediante un cálculo directo, obtenemos que  $\mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}} \cap \mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}}^\perp = \{0\}$  o, equivalentemente (véase la proposición B.6 del Apéndice B), que  $\mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}}$  es un subespacio vectorial  $k$ -simplético del espacio vectorial  $k$ -simplético  $(T_{w_{\mathbf{q}}}(T_k^1 Q), \omega_L^1(w_{\mathbf{q}}), \dots, \omega_L^k(w_{\mathbf{q}}), V_{w_{\mathbf{q}}})$ .

Recíprocamente, asumimos que para cada  $w_{\mathbf{q}} \in \mathcal{M}$ ,  $\mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}}$  es un subespacio  $k$ -simplético en  $(T_{w_{\mathbf{q}}}(T_k^1 Q), \omega_L^1(w_{\mathbf{q}}), \dots, \omega_L^k(w_{\mathbf{q}}), V_{w_{\mathbf{q}}})$ , esto es  $\mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}} \cap \mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}}^\perp = \{0\}$ . En efecto, sea  $Z \in T_{w_{\mathbf{q}}} \mathcal{M} \cap \mathcal{S}(w_{\mathbf{q}})$  entonces

$$Z \in T_{w_{\mathbf{q}}} \mathcal{M} \cap \mathcal{S}(w_{\mathbf{q}}) = T_{w_{\mathbf{q}}} \mathcal{M} \cap (D^v)_{w_{\mathbf{q}}}^\perp \subset T_{w_{\mathbf{q}}} \mathcal{M} \cap (D^v)_{w_{\mathbf{q}}} = \mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}}.$$

Puesto que  $\omega_L^A(w_{\mathbf{q}})(Z, Y) = 0$  para todo  $A$  ( $A = 1, \dots, k$ ) y para todo  $Y \in \mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}}$ , se sigue que  $Z \in \mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}}^\perp$ . Así  $Z \in \mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}} \cap \mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}}^\perp = \{0\}$  y por tanto  $Z = 0$ .

□

Consideremos ahora, la restricción  $\omega_{\mathfrak{D}}^A$  y  $d_{\mathfrak{D}} E_L$  de  $\omega_L^A$  y  $dE_L$  a  $\mathfrak{D}$ , respectivamente. Puesto que  $\mathfrak{D}_{w_{\mathbf{q}}}$  es un espacio  $k$ -simplético para cada  $w_{\mathbf{q}} \in \mathcal{M}$ , existe una solución en  $\mathfrak{D}$  de la ecuación

$$\sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega_{\mathfrak{D}}^A = d_{\mathfrak{D}} E_L. \quad (3.21)$$

**Observación 3.22** En el caso particular  $k = 1$  los resultados que hemos incluido aquí (a partir del Lema 3.19) se corresponden con la la caracterización de la mecánica no-holónica en el caso de ligaduras lineales realizada por Bates y Sniatycki en [8]. Un estudio similar al que hemos realizado aquí es el que realizaron M. de León, J.C. Marrero y D. Martín de Diego en [69] para ligaduras ideales.

◇

**Proposición 3.23**  $\xi_{L, \mathcal{M}}$  es una solución del problema con ligaduras, i.e.  $\xi_{L, \mathcal{M}} = (\xi_{L, \mathcal{M}}^1, \dots, \xi_{L, \mathcal{M}}^k)$  verifica las ecuaciones geométricas lagrangianas no-holónicas (3.8), si, y sólo si,  $\xi_{L, \mathcal{M}}$  es solución de la ecuación (3.21).

*Demostración:*

Si  $\xi_{L,\mathcal{M}}$  es solución de las ecuaciones geométricas lagrangianas no-holonómicas (3.8) entonces  $\xi_{L,\mathcal{M}}$  es un SOPDE y  $\xi_{L,\mathcal{M}}^A \in T\mathcal{M}$ .

Por otro lado, puesto que  $\xi_{L,\mathcal{M}}$  es un SOPDE se tiene

$$(\tau_Q^k)^* \varphi_\alpha(\xi_{L,\mathcal{M}}^A) = (\varphi_\alpha)_i v_A^i = 0,$$

a lo largo de  $\mathcal{M}$ , y así  $\xi_{L,\mathcal{M}}^A \in (D^v)_{w_{\mathbf{q}}}$ . Así  $\xi_{L,\mathcal{M}}^A \in \mathfrak{D}$  y  $\xi_{L,\mathcal{M}}$  es trivialmente una solución de la ecuación (3.21).

Recíprocamente, si  $(X_1, \dots, X_k)$  es solución de la ecuación (3.21) entonces para cada  $A$  ( $A = 1, \dots, k$ ),  $X_A \in \mathfrak{D} \subset T\mathcal{M}$  y es evidente que  $(X_1, \dots, X_k)$  es solución de las ecuaciones geométricas lagrangianas no-holonómicas (3.8).

### C. Ligaduras lineales.

Ahora vamos a considerar el caso en el que las ligaduras son funciones en  $T_k^1 Q$ , lineales en las “velocidades”. A diferencia con los casos anteriores no exigimos que estas ligaduras se obtengan a partir de distribuciones en  $Q$ . Localmente esto significa que las funciones de ligadura que vamos a considerar son  $m$  funciones  $\Phi_\alpha : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma

$$\Phi_\alpha(v_{1_{\mathbf{q}}}, \dots, v_{k_{\mathbf{q}}}) = \Phi_\alpha(q^i, v_A^i) = \sum_{B=1}^k (\mu_\alpha^B)_i(\mathbf{q}) v_B^i = \sum_{B=1}^k \mu_\alpha^B(v_{B_{\mathbf{q}}}),$$

donde  $\mu_\alpha^B$  son  $mk$  1-formas en  $Q$ ,  $1 \leq \alpha \leq m$ ,  $1 \leq B \leq k$ , con expresión local  $\mu_\alpha^B = (\mu_\alpha^B)_i dq^i$ .

Consideramos la subvariedad de ligaduras, de dimension  $nk - m$ ,

$$\mathcal{M} = \{w_{\mathbf{q}} = (v_{1_{\mathbf{q}}}, \dots, v_{k_{\mathbf{q}}}) \in T_k^1 Q : \Phi_\alpha(w_{\mathbf{q}}) = 0 \quad 1 \leq \alpha \leq m\}.$$

Ahora denotamos por  $D$  la distribución en  $Q$  definida por  $D^0 = \langle \mu_\alpha^B \rangle$ .

**Proposición 3.24** *Sea  $L$  un Lagrangiano regular y  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  un campo de  $k$ -vectores integrable el cual es una solución de*

$$\sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega_L^A - dE_L \in (D^V)^0, \quad X_A|_{\mathcal{M}} \in T\mathcal{M} \quad (3.22)$$

donde  $(D^V)^0 = \langle (\tau_Q^k)^* \mu_\alpha^B \rangle$ . Entonces

i)  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  es un SOPDE.

ii) Si  $\phi^{(1)}(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t}), \partial\phi^i/\partial t^A(\mathbf{t}))$  es una sección integral de  $\mathbf{X}$ , entonces  $\phi$  satisface las ecuaciones de campo lagrangianas no-holonómicas (3.7).

*Demostración:*

Observemos que

$$\eta_\alpha^A = J^{A*}(d\Phi_\alpha) = \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial v_A^i} dq^i = (\mu_\alpha^A)_i dq^i = (\tau_Q^k)^* \mu_\alpha^A$$

y así, en este caso particular,

$$(D^V)^0 = \langle \eta_\alpha^A \rangle.$$

Así, las ecuaciones (3.22) son equivalentes a las ecuaciones geométricas lagrangianas no-holonómicas (3.8), para el caso de ligaduras lineales, de donde se sigue el resultado buscado.

□

**Observación 3.25** El caso particular  $k = 1$  se corresponde con el estudio de las ligaduras lineales en la Mecánica lagrangiana, véase por ejemplo [69].

#### 3.4.4. Ligaduras definidas por conexiones

Supongamos que  $Q$  es una variedad fibrada sobre  $M$ , esto es,  $\varphi : Q \rightarrow M$  es una submersión sobreyectiva. Sea  $\Gamma$  una conexión en  $\varphi : Q \rightarrow M$  de modo que

$$TQ = H \oplus V_\varphi,$$

donde  $V_\varphi = \ker T\varphi$ . Considerando coordenadas fibradas  $(q^a, q^\alpha)$ ,  $1 \leq a \leq n - m$ ,  $1 \leq \alpha \leq m$ ,  $n = \dim Q$ , la distribución horizontal está localmente generada por los campos de vectores

$$H_a = \left( \frac{\partial}{\partial q^a} \right)^H = \frac{\partial}{\partial q^a} - \Gamma_a^\alpha(q^b, q^\beta) \frac{\partial}{\partial q^\alpha},$$

donde  $Y^H$  denota el levantamiento horizontal a  $Q$  de un campo de vectores  $Y$  en  $M$ , y  $\Gamma_a^\alpha(q^b, q^\beta)$  son los símbolos de Christoffel de  $\Gamma$ . Así, obtenemos una base local de campos de vectores en  $Q$ ,

$$\{H_a, V_\alpha = \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\}_{1 \leq a \leq n-m, 1 \leq \alpha \leq m}.$$

Su base dual es el conjunto de 1-formas

$$\{\eta_a = dq^a, \varphi_\alpha = \Gamma_a^\alpha dq^a + dq^\alpha\}_{1 \leq a \leq n-m, 1 \leq \alpha \leq m}.$$

Deducimos que  $H^0$  está localmente generado por las 1-formas  $\{\varphi_\alpha\}$ .

En esta situación se tiene la siguiente descomposición

$$T_k^1 Q = H \oplus \overset{k}{\cdot} \cdot \oplus H \oplus V \wp \oplus \overset{k}{\cdot} \cdot \oplus V \wp,$$

y para cada vector  $v_A$ ,  $1 \leq A \leq k$  podemos escribir

$$v_A = u_A^a \frac{\partial}{\partial q^a} + v_A^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} = u_A^a \left( \frac{\partial}{\partial q^a} - \Gamma_a^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right) + (u_A^a \Gamma_a^\alpha + v_A^\alpha) \frac{\partial}{\partial q^\alpha} = v_A^H + v_A^V$$

Definimos la subvariedad de ligaduras

$$\mathcal{M} = H \oplus \overset{k}{\cdot} \cdot \oplus H \subset T_k^1 Q;$$

entonces  $w_{\mathbf{q}} = (v_{1_{\mathbf{q}}}, \dots, v_{k_{\mathbf{q}}}) \in \mathcal{M}$  si, y sólo si,  $v_{A_{\mathbf{q}}} \in H$  para todo  $A = 1, \dots, k$ , lo que significa que

$$v_A^\alpha = -u_A^a \Gamma_a^\alpha \quad \text{para todo } A = 1, \dots, k$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{w_{\mathbf{q}} \in T_k^1 Q : v_A^\alpha = -u_A^a \Gamma_a^\alpha, 1 \leq A \leq k\} \\ &= \{w_{\mathbf{q}} \in T_k^1 Q : \varphi_\alpha(v_{A_{\mathbf{q}}}) = 0, 1 \leq A \leq k\}. \end{aligned}$$

A partir de las 1-formas  $\varphi_\alpha = \Gamma_a^\alpha dq^a + dq^\alpha$  en  $Q$  podemos considerar las 1-formas  $(\tau_Q^k)^* \varphi_\alpha$  en  $T_k^1 Q$ . Ahora consideramos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k i_{X_A} \omega_L^A - dE_L &\in \langle (\tau_Q^k)^* \varphi_\alpha \rangle \\ X_A \Big|_{\mathcal{M}} &\in T\mathcal{M}, \quad 1 \leq A \leq k. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Como ocurría en el caso particular anterior, en este contexto estas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones geométricas no-holónicas (3.8).

Escribimos la primera ecuación de (3.23) como sigue

$$\sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega_L^A - dE_L = \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha (\tau_Q^k)^* \varphi_\alpha$$

y cada  $X_A$  como

$$X_A = (x_A)^a \frac{\partial}{\partial q^a} + (X_A)^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + (x_A)_B^a \frac{\partial}{\partial u_B^a} + (X_A)_B^\alpha \frac{\partial}{\partial v_B^\alpha}.$$

De (3.23) y teniendo en cuenta que el lagrangiano  $L$  es regular deducimos las tres identidades siguientes:

$$u_A^b \frac{\partial^2 L}{\partial q^b \partial u_A^a} + v_A^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial q^\beta \partial u_A^a} + (x_A)_B^b \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^b \partial u_A^a} + (X_A)_B^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^\beta \partial u_A^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = -\lambda_\beta \Gamma_a^\beta, \quad (3.24)$$

$$u_A^b \frac{\partial^2 L}{\partial q^b \partial v_A^\alpha} + v_A^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial q^\beta \partial v_A^\alpha} + (x_A)_B^b \frac{\partial^2 L}{\partial u_B^b \partial v_A^\alpha} + (X_A)_B^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^\beta \partial v_A^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = -\lambda_\alpha, \quad (3.25)$$

$$(x_A)^a = v_A^a, \quad (X_A)^\alpha = v_A^\alpha. \quad (3.26)$$

Si  $\psi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$ ,  $\psi(\mathbf{t}) = (\psi^a(\mathbf{t}), \psi^\alpha(\mathbf{t}), \psi_A^a(\mathbf{t}), \psi_A^\alpha(\mathbf{t}))$ , es una sección integral de  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ , entonces de (3.24), (3.25) y (3.26) deducimos que  $\psi$  es solución de las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} v_A^a(\psi(\mathbf{t})) = \frac{\partial \psi^a}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \quad ; \quad v_A^\alpha(\psi(\mathbf{t})) = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \\ \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^a} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = -\lambda_\alpha \Gamma_a^\alpha(\tau_Q^k(\psi(\mathbf{t}))) \\ \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^\alpha} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = -\lambda_\alpha \end{array} \right.$$

o, en otras palabras,

$$\begin{aligned} v_A^a(\psi(\mathbf{t})) &= \frac{\partial \psi^a}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, & v_A^\alpha(\psi(\mathbf{t})) &= \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \\ \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} &\left( \frac{\partial L}{\partial v_A^a} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} - \Gamma_a^\alpha(\tau_Q^k(\psi(\mathbf{t}))) \frac{\partial L}{\partial v_A^\alpha} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) \\ - \left( \frac{\partial L}{\partial q^a} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} - \Gamma_a^\alpha(\tau_Q^k(\psi(\mathbf{t}))) \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) &= - \frac{\partial(\Gamma_a^\alpha \circ \tau_Q^k \circ \psi)}{\partial t^A} \frac{\partial L}{\partial v_A^\alpha} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son las ecuaciones de Euler-Lagrange no-holonómicas (3.7) escritas para este caso particular.

**Observación 3.26** En el caso particular  $k = 1$ , los contenidos de este apartado se corresponden con los desarrollados por M. de León y D. Martín de Diego en [73].

El estudio de las ligaduras definidas por conexiones fue estudiado, en el contexto de las variedades de jets, por M. de León, J.C. Marrero y D. Martín de Diego en [70].

◇

### 3.5. Teoría hamiltoniana $k$ -simpléctica no-holonómica

En esta sección vamos a considerar la descripción hamiltoniana de un sistema no-holonómico sobre el fibrado de  $k^1$ -covelocidades  $(T_k^1)^*Q$  de  $Q$ .

A lo largo de todo el capítulo hemos asumido que las funciones lagrangianas son regulares, en este caso las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana  $k$ -simpléticas estándar son localmente equivalentes, (véase sección 1.3).

Si suponemos que el lagrangiano  $L$  es hiperregular entonces la transformación de Legendre  $FL$  definida en (1.33) es un difeomorfismo global. De este modo podemos trasladar los objetos de la descripción  $k$ -simpléctica lagrangiana no-holonómica al contexto hamiltoniano.

Las *funciones de ligadura* en  $(T_k^1)^*Q$  son las funciones

$$\Psi_\alpha = \Phi_\alpha \circ FL^{-1} : (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R},$$

esto es,

$$\Psi_\alpha(q^i, p_i^A) = \Phi_\alpha(q^i, \frac{\partial H}{\partial p_i^A}), 1 \leq \alpha \leq m,$$

donde la función hamiltoniana  $H : (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  se define como  $H = E_L \circ FL^{-1}$ .

Teniendo en cuenta la expresión local  $FL^{-1}(q^i, p_i^A) = (q^i, \frac{\partial H}{\partial p_i^A})$  de la inversa de la transformación de Legendre y la definición del hamiltoniano  $H = E_L \circ FL^{-1}$  tenemos

$$H = v_A^i \circ FL^{-1} p_i^A - L \circ FL^{-1}.$$

Así, de (3.7) y la expresión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i^A} &= v_A^i \circ FL^{-1} \\ \frac{\partial H}{\partial q^i} &= -\frac{\partial L}{\partial q^i} \circ FL^{-1} = -\lambda_C^\alpha \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial p_k^B} \mathcal{H}_{BC}^{ki} - \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \circ FL^{-1} \right), \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{H}_{BC}^{ki}$  son las componentes de la inversa de la matriz

$$(\mathcal{H}_{ik}^{BC}) = (\partial^2 H / \partial p_i^B \partial p_k^C).$$

Nótese que para obtener la expresión anterior hacemos uso de la identidad

$$\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial p_k^B} \mathcal{H}_{BC}^{ki} = \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_C^i} \circ FL^{-1}.$$

Así, las ecuaciones de Hamilton no-holónicas en  $(T_k^1)^*Q$  pueden ser escrita como sigue

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, \\ \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = -\lambda_C^\alpha \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial p_k^B} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \mathcal{H}_{BC}^{ki}(\psi(\mathbf{t})) - \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \\ 0 = \Psi_\alpha(\psi^i(\mathbf{t}), \psi_i^A(\mathbf{t})) \end{cases}$$

donde  $\psi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^*Q$  está localmente dado por  $\psi(\mathbf{t}) = (\psi^i(\mathbf{t}), \psi_i^A(\mathbf{t}))$ .



A continuación daremos una descripción geométrica de estas ecuaciones.

Sea  $M \subset (T_k^1)^*Q$  la imagen de la subvariedad de ligaduras  $\mathcal{M}$  bajo la aplicación de Legendre y  $\mathcal{F}$  el fibrado localmente generado por las 1-formas independientes  $\mathbb{R}^k$ -valuadas

$$\tilde{\eta}_\alpha = FL^*\eta_\alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq m.$$

Siguendo un proceso análogo al caso lagrangiano y teniendo en cuenta que estamos en el caso de un lagrangiano hiperregular se tiene que las “ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl” para el problema no-holonómico pueden ser reescritas en un modo intrínseco como

$$\sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega^A - dH \in \langle \tilde{\eta}_\alpha^A \rangle, \quad X_A|_M \in TM,$$

donde  $\omega^1, \dots, \omega^k$  son las 2-formas canónicas en  $(T_k^1)^*Q$  definidas en (1.31).

**Observación 3.27** En el caso  $k = 1$ , los resultados análogos de esta sección pueden encontrarse en el trabajo de M. de León [77].

◇



## Capítulo 4

# Relación entre conexiones no lineales en $T_k^1Q$ y SOPDE'S

En este capítulo vamos considerar conexiones no lineales en el fibrado tangente de las  $k^1$ -velocidades  $T_k^1Q$  de una variedad  $Q$  y relacionaremos estas conexiones no lineales con las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden (SOPDE'S) que aparecen en la formulación lagrangiana  $k$ -simpléctica de las teorías clásicas de campos de primer orden.

Además veremos como introducir los elementos geométricos canónicos de  $T_k^1Q$ , necesarios para la formulación  $k$ -simpléctica, a partir de una sucesión exacta corta determinada por el fibrado  $T_k^1Q$ .

### 4.1. La sucesión exacta corta construida a partir de $\tau_Q^k : T_k^1Q \rightarrow Q$ .

En esta sección definiremos, a partir del fibrado tangente de las  $k^1$ -velocidades  $T_k^1Q$  de una variedad  $Q$ , una sucesión exacta que nos permitirá definir los elementos geométricos canónicos de este fibrado, necesarios para la formulación  $k$ -simpléctica, los cuales hemos recordado en el capítulo 1 en la forma en la que se definen habitualmente.

#### 4.1.1. El fibrado vectorial $(T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q, (\tau_Q^k)^* \tau_Q^k, T_k^1 Q)$ .

Consideremos el fibrado  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$ , entonces el pull-back de  $\tau_Q^k$  por  $\tau_Q^k$  es el fibrado

$$(T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q, (\tau_Q^k)^* \tau_Q^k, T_k^1 Q),$$

donde el espacio total es

$$T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q = \{(v_{\mathbf{q}}, w_{\mathbf{q}}) \in T_k^1 Q \times T_k^1 Q \mid \tau_Q^k(v_{\mathbf{q}}) = \tau_Q^k(w_{\mathbf{q}})\}.$$

El siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\tau_Q^k)^*(T_k^1 Q) \equiv T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q & \longrightarrow & T_k^1 Q \\ \downarrow (\tau_Q^k)^* \tau_Q^k & & \downarrow \tau_Q^k \\ T_k^1 Q & \xrightarrow{\tau_Q^k} & Q \end{array}$$

siendo  $(\tau_Q^k)^* \tau_Q^k : T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$  es la proyección canónica definida por

$$(\tau_Q^k)^* \tau_Q^k(v_{\mathbf{q}}, w_{\mathbf{q}}) = v_{\mathbf{q}},$$

donde  $(v_{\mathbf{q}}, w_{\mathbf{q}})$  es un elemento arbitrario de  $T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q$ , esto es,  $v_{\mathbf{q}} = (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})$  y  $w_{\mathbf{q}} = (w_{1\mathbf{q}}, \dots, w_{k\mathbf{q}})$  son dos  $k$ -tuplas de vectores tangentes a  $Q$ .

La fibra de  $(\tau_Q^k)^*(T_k^1 Q)$  en un punto  $v_{\mathbf{q}} \in T_k^1 Q$  es el espacio vectorial real

$$\{v_{\mathbf{q}}\} \times T_{\mathbf{q}} Q \oplus \dots \oplus T_{\mathbf{q}} Q \cong T_{\mathbf{q}} Q \oplus \dots \oplus T_{\mathbf{q}} Q$$

y de dimensión  $nk$ .

A lo largo de este capítulo denotaremos por

$$\text{Sec}((\tau_Q^k)^* \tau_Q^k)$$

el  $C^\infty(T_k^1 Q)$ -módulo de secciones de la proyección  $(\tau_Q^k)^* \tau_Q^k$ . Veamos algunos elementos de este conjunto que serán importantes a lo largo del capítulo.

- (1) Llamamos **sección canónica** a la sección  $\delta := (id_{T_k^1 Q}, id_{T_k^1 Q}) \in \text{Sec}((\tau_Q^k)^* \tau_Q^k)$ , esto es

$$\begin{aligned} \delta := (id_{T_k^1 Q}, id_{T_k^1 Q}) : T_k^1 Q &\rightarrow T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \\ v_{\mathbf{q}} &\mapsto (v_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Esta sección nos permitirá introducir el campo de Liouville generalizado  $\Delta$  en  $T_k^1 Q$ , como veremos en la sección 4.2.2

(2) Para cada  $A$ ,  $1 \leq A \leq k$  definimos el elemento  $\delta_A \in \text{Sec}((\tau_Q^k)^* \tau_Q^k)$  como sigue:

$$\begin{aligned} \delta_A : T_k^1 Q &\rightarrow T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \\ \mathbf{v}_{\mathbf{q}} &\mapsto \delta_A(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

donde

$$\delta_A(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}) = \delta(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, (0, \dots, 0, v_{A\mathbf{q}}, 0, \dots, 0)) = (\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, (0, \dots, 0, v_{A\mathbf{q}}, 0, \dots, 0)). \quad (4.2)$$

De modo análogo a lo que comentamos sobre la sección canónica  $\delta$ , estas secciones  $\delta_A$  nos permitirán introducir de un modo diferente los campos de vectores canónicos,  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ , en  $T_k^1 Q$ , que hemos introducido en la sección 1.2.1.

(3) Cada campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(Q)$  nos permite definir  $k$  elementos  $\overset{1}{\widetilde{X}}, \dots, \overset{k}{\widetilde{X}}$  del conjunto  $\text{Sec}((\tau_Q^k)^* \tau_Q^k)$  del siguiente modo:

$$\overset{A}{\widetilde{X}} := (id_{T_k^1 Q}, (0, \dots, 0, \overset{A}{X}, 0, \dots, 0) \circ \tau_Q^k) : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q$$

esto es,

$$\overset{A}{\widetilde{X}}(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}) = (\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, (0, \dots, \overset{A}{X}_{\mathbf{q}}, 0, \dots, 0)), \quad 1 \leq A \leq k.$$

**Observación 4.1** El conjunto de secciones  $\text{Sec}((\tau_Q^k)^* \tau_Q^k)$  se puede identificar con el conjunto de campos de  $k$ -vectores en  $Q$  definidos a lo largo de  $\tau_Q^k$ . En efecto, los elementos de  $\text{Sec}((\tau_Q^k)^* \tau_Q^k)$  son de la forma

$$\widetilde{Z} = (id_{T_k^1 Q}, \underline{Z}) : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q$$

donde

$$\underline{Z} : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q, \quad \underline{Z}(q^i, v_A^i) = (q^j, Z_B^j(q^i, v_A^i))$$

es una aplicación diferenciable tal que  $\tau_Q^k \circ \underline{Z} = \tau_Q^k$ ,

$$\begin{array}{ccc} & & T_k^1 Q \\ & \nearrow \underline{Z} & \downarrow \tau_Q^k \\ T_k^1 Q & \xrightarrow{\tau_Q^k} & Q \end{array}$$

esto es,  $\underline{Z} : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$  es un campo de  $k$ -vectores en  $Q$  a lo largo de  $\tau_Q^k$ , o equivalentemente, una sección de  $\tau_Q^k$  a lo largo de  $\tau_Q^k$ .

Así tenemos el isomorfismo de  $\mathcal{C}^\infty(T_k^1 Q)$ -módulos

$$\begin{aligned} \text{Sec}((\tau_Q^k)^* \tau_Q^k) &\cong \Gamma_{\tau_Q^k}(\tau_Q^k) \\ \tilde{Z} &\equiv \underline{Z} \end{aligned}$$

donde  $\Gamma_{\tau_Q^k}(\tau_Q^k)$  denota el conjunto de secciones de  $\tau_Q^k$  a lo largo de  $\tau_Q^k$ .

◇

#### 4.1.2. La aplicación $\mathbf{i} : T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \longrightarrow V(T_k^1 Q) \subset T(T_k^1 Q)$ .

En este apartado definiremos una aplicación en el fibrado  $T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q$ , que hemos introducido en el apartado anterior, y que nos permitirá dar una nueva definición de los campos de vectores canónicos en  $T_k^1 Q$  y del levantamiento vertical  $A$ -ésimo de los vectores tangentes a  $Q$  a vectores tangentes a  $T_k^1 Q$ , (estos conceptos ya fueron introducidos, en la forma usual, en la sección 1.2.1).

Denotamos por  $V(T_k^1 Q)$  el subfibrado vertical de  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$  y definimos la aplicación

$$\mathbf{i} : T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \longrightarrow V(T_k^1 Q) \subset T(T_k^1 Q)$$

por

$$\begin{aligned} \mathbf{i}(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}}) &= \sum_{A=1}^k \frac{d}{ds} \Big|_0 (\mathbf{v}_{\mathbf{q}} + s(0, \dots, w_{A\mathbf{q}}, \dots, 0)) \\ &= \sum_{A=1}^k \frac{d}{ds} \Big|_0 (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{A\mathbf{q}} + s w_{A\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}). \end{aligned}$$

Considerando un sistema local de coordenadas  $(q^i, v_A^i)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$  en  $T_k^1 Q$  es sencillo comprobar que se verifica:

$$\mathbf{i}(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}}) = \sum_{A=1}^k w_A^i \frac{\partial}{\partial v_A^i} \Big|_{\mathbf{v}_{\mathbf{q}}}. \quad (4.3)$$

**Observación 4.2** Teniendo en cuenta la expresión (4.3) obtenemos que la aplicación  $\mathbf{i}$  se puede escribir como sigue:

$$\mathbf{i}(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}}) = \sum_{A=1}^k (w_{A\mathbf{q}})^{V_A}(\mathbf{v}_{\mathbf{q}})$$

donde  $(w_{A\mathbf{q}})^{V_A}$  denota el levantamiento vertical  $A$ -ésimo a  $T_k^1 Q$  del vector  $w_{A\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}} Q$ .

◇

Algunas propiedades interesantes de la aplicación  $\mathbf{i}$  son las siguientes:

- (1) El **campo de vectores de Liouville**  $\Delta$  en  $T_k^1 Q$ , que es el generador infinitesimal de las dilataciones a lo largo de las fibras de  $T_k^1 Q$ , (véase 1.26), se puede definir mediante la composición

$$\Delta = \mathbf{i} \circ \delta, \quad (4.4)$$

esto es,

$$\begin{array}{c} \Delta \\ \curvearrowright \\ T_k^1 Q \xrightarrow{\delta} T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \xrightarrow{\mathbf{i}} V(T_k^1 Q) \subset T(T_k^1 Q) \end{array}$$

donde  $\delta$  es la sección canónica definida por  $\delta(v_{\mathbf{q}}) = (v_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{q}})$ .

- (2) Los campos de vectores canónicos  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  definidos en (1.28) se pueden definir de modo análogo a como acabamos de introducir el campo de vectores de Liouville  $\Delta$ , a partir de la aplicación  $\mathbf{i}$ , como sigue:

$$\Delta_A = \mathbf{i} \circ \delta_A, \quad 1 \leq A \leq k$$

esto es,

$$\begin{array}{c} \Delta_A \\ \curvearrowright \\ T_k^1 Q \xrightarrow{\delta_A} T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \xrightarrow{\mathbf{i}} V(T_k^1 Q) \subset T(T_k^1 Q) \end{array}$$

donde  $\delta_A$  es la sección de  $(\tau_Q^k)^* \tau_Q^k$  definida en (4.2).

- (3) El *levantamiento vertical*  $A$ -ésimo  $X^{V_A}$  de  $X \in \mathfrak{X}(Q)$  a  $T_k^1 Q$ , (véase (1.22)), se puede definir como el campo de vectores en  $T_k^1 Q$  dado por  $X^{V_A} = \mathbf{i} \circ \overset{A}{\widetilde{X}}$

$$\begin{array}{c} X^{V_A} \\ \curvearrowright \\ T_k^1 Q \xrightarrow{\overset{A}{\widetilde{X}}} T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \xrightarrow{\mathbf{i}} V(T_k^1 Q) \subset T(T_k^1 Q) \end{array}$$

es decir,

$$X^{V_A}(v_q) = \mathbf{i} \circ \widetilde{\widetilde{X}}^A(v_q) = \mathbf{i}(\widetilde{\widetilde{X}}^A(v_q)) = \mathbf{i}(v_q, (0, \dots, \widetilde{X}_{\mathbf{q}}^A, 0, \dots, 0)) = X^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial v_A^i} \Big|_{\mathbf{q}}.$$

**Observación 4.3** Si reescribimos las propiedades de la aplicación  $\mathbf{i}$  en el caso particular  $k = 1$  reobtenemos las construcciones análogas recogidas por Szilasi en la página 85 de [131].

◇

#### 4.1.3. El fibrado vectorial $(T_k^1 Q \times_Q TQ, (\tau_Q^k)^* \tau_Q, T_k^1 Q)$ .

Consideremos ahora el fibrado  $(\tau_Q^k)^* \tau_Q$ , que es el pull-back del fibrado tangente  $TQ$  por  $\tau_Q^k$ . Este fibrado se llama el **fibrado transverso a  $\tau_Q^k$** . El espacio total de este fibrado es

$$T_k^1 Q \times_Q TQ = \{(v_q, u_q) \in T_k^1 Q \times TQ \mid \tau_Q^k(v_q) = \tau_Q(u_q)\}.$$

El siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_k^1 Q \times_Q TQ & \longrightarrow & TQ \\ (\tau_Q^k)^* \tau_Q \downarrow & & \downarrow \tau_Q \\ T_k^1 Q & \xrightarrow{\tau_Q^k} & Q \end{array}$$

donde  $(\tau_Q^k)^* \tau_Q : T_k^1 Q \times_Q TQ \rightarrow T_k^1 Q$  es la proyección canónica definida por

$$(\tau_Q^k)^* \tau_Q(v_q, u_q) = v_q,$$

siendo  $v_q = (v_{1q}, \dots, v_{kq}) \in T_k^1 Q$  y  $u_q \in T_q Q$ .

La fibra en el punto  $v_q \in T_k^1 Q$  es el espacio vectorial  $\{v_q\} \times T_{\tau_Q^k(v_q)} Q \cong T_{\tau_Q^k(v_q)} Q$ .

A lo largo de este capítulo denotaremos por

$$Sec((\tau_Q^k)^* \tau_Q)$$

el conjunto de secciones de  $(\tau_Q^k)^* \tau_Q$ . En este conjunto tendrán especial importancia los siguientes elementos:



(1) Para cada  $A$ ,  $1 \leq A \leq k$  definimos el elemento  $\widehat{\delta}_A \in \text{Sec}((\tau_Q^k)^* \tau_Q)$  como sigue:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_A : T_k^1 Q &\longrightarrow T_k^1 Q \times_Q TQ \\ \mathbf{v}_{\mathbf{q}} = (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{kbq}) &\mapsto \widehat{\delta}_A(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}) = (\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, v_{A\mathbf{q}}) \end{aligned}, 1 \leq A \leq k. \quad (4.5)$$

Estas aplicaciones nos permitirán obtener el SOPDE asociado a una conexión no lineal, como veremos en la sección 4.3

(2) Para cada campo de vectores  $X$  en  $Q$ , la aplicación

$$\widehat{X} = (id_{T_k^1 Q}, X \circ \tau_Q^k) : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q \times_Q TQ \quad (4.6)$$

dada por  $\widehat{X}(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}) = (\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, X(\mathbf{q}))$  es una sección de  $(\tau_Q^k)^* \tau_Q$ . En particular, las secciones

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial q^i}}(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}) = (\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\tau_Q^k(\mathbf{v}_{\mathbf{q}})})$$

forman una base local del conjunto  $\text{Sec}((\tau_Q^k)^* \tau_Q)$  de secciones de  $(\tau_Q^k)^* \tau_Q$ .

**Observación 4.4** El conjunto de secciones  $\text{Sec}((\tau_Q^k)^* \tau_Q)$  se puede identificar con el conjunto de campos de vectores en  $Q$  definidos a lo largo de  $\tau_Q^k$ . La comprobación de esta afirmación es similar a la realizada en la observación 4.1.

◇

#### 4.1.4. La aplicación $\mathbf{j} : T(T_k^1 Q) \longrightarrow T_k^1 Q \times_Q TQ$

Sea  $\tau_{T_k^1 Q} : T(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q$  el fibrado tangente a  $T_k^1 Q$  y  $T\tau_Q^k : T(T_k^1 Q) \rightarrow TQ$  la aplicación tangente asociada a  $\tau_Q^k$ . Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{j} := (\tau_{T_k^1 Q}, T\tau_Q^k) : T(T_k^1 Q) &\longrightarrow T_k^1 Q \times_Q TQ \\ Z_{\mathbf{v}_{\mathbf{q}}} &\longrightarrow (\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, T_{\mathbf{v}_{\mathbf{q}}} \tau_Q^k(Z_{\mathbf{v}_{\mathbf{q}}})) \end{aligned}$$

localmente dada por

$$\mathbf{j}(Z_{\mathbf{v}_{\mathbf{q}}}) = \mathbf{j} \left( Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{v}_{\mathbf{q}}} + Z_A^i \frac{\partial}{\partial v_A^i} \Big|_{\mathbf{v}_{\mathbf{q}}} \right) = \left( \mathbf{v}_{\mathbf{q}}, Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}} \right) \quad (4.7)$$

esto es,

$$\mathbf{j}(q^i, v_A^i, Z^i, Z_A^i) = (q^i, v_A^i, Z^i).$$

La aplicación  $\mathbf{j}$  que acabamos de introducir es un homomorfismo entre el fibrado tangente  $\tau_{T_k^1 Q}$  y el fibrado transversal  $(\tau_Q^k)^* \tau_Q$ , esto es, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T(T_k^1 Q) & \xrightarrow{\mathbf{j}} & T_k^1 Q \times_Q TQ \\ \tau_{T_k^1 Q} \downarrow & & \downarrow (\tau_Q^k)^* \tau_Q \\ T_k^1 Q & \xrightarrow{id_{T_k^1 Q}} & T_k^1 Q \end{array}$$

y además las aplicaciones inducidas  $\mathbf{j}_{v_q} : T_{v_q}(T_k^1 Q) \rightarrow (T_k^1 Q \times_Q TQ)_{v_q}$  son lineales para todo  $v_q \in T_k^1 Q$ .

**Observación 4.5** En el libro de Szilasi, [131], página 62, podemos encontrar la definición de la aplicación  $\mathbf{j}$  considerando un fibrado vectorial arbitrario  $(E, \pi, M)$ . En nuestro caso  $E = T_k^1 Q$ ,  $M = Q$  y  $\pi = \tau_Q^k$ .

◇

#### 4.1.5. La sucesión exacta corta construida a partir de $\tau_Q^k$ .

Con los elementos que hemos introducido a lo largo de esta sección podemos definir una sucesión exacta corta de fibrados vectoriales. A dicha sucesión la denominaremos *la sucesión exacta corta canónica* construida a partir de  $\tau_Q^k$ . Esta sucesión nos permitirá introducir conexiones no-lineales en el fibrado tangente de las  $k^1$ -velocidades  $T_k^1 Q$ .

**Lema 4.6** *La sucesión*

$$0 \longrightarrow T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \xrightarrow{\mathbf{i}} T(T_k^1 Q) \xrightarrow{\mathbf{j}} T_k^1 Q \times_Q TQ \longrightarrow 0 \quad (4.8)$$

*es una sucesión exacta corta de fibrados vectoriales, que se llama la **sucesión exacta corta canónica** construida a partir de  $\tau_Q^k$ .*

*Demostración:*

La demostración de este resultado se puede encontrar en la página 62 de Szilasi, [131], para un fibrado arbitrario  $(E, \pi, M)$ . En nuestro caso  $E = T_k^1 Q$ ,  $M = Q$  y  $\pi = \tau_Q^k$ .

El punto principal de esta demostración es que  $\mathbf{j} \circ \mathbf{i} = 0$ , lo que es una consecuencia directa de las expresiones locales (4.3) y (4.7) de  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  respectivamente.

□

**Observación 4.7** Antes de continuar con nuestro estudio, en el siguiente diagrama se recogen las secciones que hemos definido en los apartados anteriores.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q & \xrightarrow{\mathbf{i}} & T(T_k^1 Q) & \xrightarrow{\mathbf{j}} & T_k^1 Q \times_Q TQ \longrightarrow 0 \\
 & & \swarrow \delta_A & & \searrow \hat{\delta}_A & & \nearrow \delta_A \\
 & & T_k^1 Q & & T_k^1 Q & & 
 \end{array}$$

◇

Las aplicaciones  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$ , que nos permitieron definir la sucesión anterior, también nos permiten definir  $k$  aplicaciones  $\mathbf{k}_A$  entre los fibrados  $T_k^1 Q \times_Q TQ$  y  $T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q$  del siguiente modo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{k}_A : T_k^1 Q \times_Q TQ & \longrightarrow & T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \\
 (v_{\mathbf{q}}, u_{\mathbf{q}}) & \longrightarrow & (v_{\mathbf{q}}, (0, \dots, 0, u_{\mathbf{q}}^A, 0, \dots, 0)) \quad 1 \leq A \leq k.
 \end{array}$$

Estas aplicaciones nos permiten introducir, de modo alternativo, la estructura  $k$ -tangente canónica  $(J^1, \dots, J^k)$  que hemos definido en la sección 1.2.1. En efecto, se verifica que la composición  $\mathbf{i} \circ \mathbf{k}_A \circ \mathbf{j}$ ,

$$\begin{array}{c}
 T(T_k^1 Q) \xrightarrow{\mathbf{j}} T_k^1 Q \times_Q TQ \xrightarrow{\mathbf{k}_A} T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \xrightarrow{\mathbf{i}} T(T_k^1 Q) \\
 Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} + Z_A^i \frac{\partial}{\partial v_A^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} \mapsto (v_{\mathbf{q}}, Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}}) \mapsto (v_{\mathbf{q}}, (0, \dots, Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}}, \dots, 0)) \mapsto Z^i \frac{\partial}{\partial v_A^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}}
 \end{array}$$

es el campo de tensores  $J^A$  de tipo  $(1, 1)$  en  $T_k^1 Q$ , donde  $(J^1, \dots, J^k)$  es **la estructura  $k$ -tangente canónica** en  $T_k^1 Q$ , véase [80, 107, 119].

## 4.2. Conexiones no lineales en el fibrado vectorial $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$ .

En esta sección vamos a considerar conexiones de Ehresmann o conexiones no lineales en el fibrado tangente de las  $k^1$ -velocidades. Recordemos que una conexión

de Ehresmann en  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$  es un subfibrado diferenciable  $H(T_k^1 Q)$  de  $T(T_k^1 Q)$ , llamado el fibrado horizontal de la conexión y que es complementario del fibrado vertical  $V(T_k^1 Q)$ , en el sentido de que está definida la siguiente suma directa

$$T(T_k^1 Q) = H(T_k^1 Q) \oplus V(T_k^1 Q).$$

A lo largo de esta sección repasaremos distintas formas de introducir las conexiones no lineales en  $T_k^1 Q$ . Una de estas definiciones se basa en la sucesión exacta corta que hemos definido en la sección anterior. También caracterizaremos las conexiones no lineales en  $T_k^1 Q$  en términos de la estructura  $k$ -tangente canónica de  $T_k^1 Q$ .

#### 4.2.1. La aplicación horizontal $\mathcal{H} : T_k^1 Q \times_Q TQ \longrightarrow T(T_k^1 Q)$ .

En este apartado veremos que dar una conexión en  $T_k^1 Q$  a partir de un subfibrado horizontal  $H(T_k^1 Q)$  es equivalente a dar una escisión por la derecha de la sucesión exacta corta (4.8) que hemos definido en la sección anterior.

**Definición 4.8** *Una escisión por la derecha de la sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \xrightarrow{\mathbf{i}} T(T_k^1 Q) \xrightarrow{\mathbf{j}} T_k^1 Q \times_Q TQ \longrightarrow 0 ,$$

se llama **aplicación horizontal para  $\tau_Q^k$** . En otras palabras una aplicación horizontal es un  $T_k^1 Q$ -morfismo (i.e. el morfismo en la base es  $\text{id}_{T_k^1 Q}$ ) de fibrados vectoriales

$$\mathcal{H} : T_k^1 Q \times_Q TQ \longrightarrow T(T_k^1 Q)$$

que verifica

$$\mathbf{j} \circ \mathcal{H} = \text{id}_{T_k^1 Q \times_Q TQ} .$$

A partir de la definición anterior obtenemos que

$$T(T_k^1 Q) = \text{Im } \mathbf{i} \oplus \text{Im } \mathcal{H} = V(T_k^1 Q) \oplus \text{Im } \mathcal{H}$$

entonces  $\text{Im } \mathcal{H}$  es un subfibrado horizontal de  $T(T_k^1 Q)$ .

**Proposición 4.9** *La aplicación  $\mathcal{H} : T_k^1 Q \times_Q TQ \longrightarrow T(T_k^1 Q)$  está localmente dada por*

$$\mathcal{H}(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, u_{\mathbf{q}}) = u^i \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{v}_{\mathbf{q}}} - N_{Ai}^j(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}) \frac{\partial}{\partial v_A^j} \Big|_{\mathbf{v}_{\mathbf{q}}} \right) \quad (4.9)$$

donde  $v_{\mathbf{q}} \in T_k^1 Q$ ,  $u_{\mathbf{q}} \in TQ$  y las funciones  $N_{Ai}^j$ , definidas en  $T_k^1 Q$ , son las componentes de la conexión definida por  $\mathcal{H}$ .

*Demostración:*

Consideramos sistemas locales de coordenadas  $(q^i, v^i)$ ,  $(q^i, v_A^i, Z^i, Z_A^i)$  y  $(q^i, v_A^i, v^i)$  de  $TQ$ ,  $T(T_k^1 Q)$  y  $T_k^1 Q \times_Q TQ$ , respectivamente. Entonces la expresión local de  $\mathcal{H}$  es

$$\mathcal{H}(v_{\mathbf{q}}, u_{\mathbf{q}}) = H^i(v_{\mathbf{q}}, u_{\mathbf{q}}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} - N_A^i(v_{\mathbf{q}}, u_{\mathbf{q}}) \frac{\partial}{\partial v_A^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}}$$

para ciertas funciones  $H^i$ ,  $N_A^i$  definidas en  $T_k^1 Q \times_Q TQ$

Puesto que  $\mathbf{j} \circ \mathcal{H} = \text{id}_{T_k^1 Q \times_Q TQ}$ , de (4.7), obtenemos

$$\mathcal{H}(v_{\mathbf{q}}, u_{\mathbf{q}}) = u^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} - N_A^i(v_{\mathbf{q}}, u_{\mathbf{q}}) \frac{\partial}{\partial v_A^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}}. \quad (4.10)$$

Por otra parte,  $\mathcal{H}$  es un morfismo de fibrados vectoriales, lo que quiere decir que verifica las siguientes condiciones:

(1) El diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_k^1 Q \times_Q TQ & \xrightarrow{\mathcal{H}} & T(T_k^1 Q) \\ (\tau_Q^k)^* \tau_Q \downarrow & & \downarrow \tau_{T_k^1 Q} \\ T_k^1 Q & \xrightarrow{\text{id}_{T_k^1 Q}} & T_k^1 Q \end{array}$$

es conmutativo.

(2) Las aplicaciones inducidas

$$\mathcal{H}_{v_{\mathbf{q}}} : (T_k^1 Q \times_Q TQ)_{v_{\mathbf{q}}} \cong \{v_{\mathbf{q}}\} \times T_{\mathbf{q}} Q \rightarrow T_{v_{\mathbf{q}}}(T_k^1 Q)$$

son lineales para todo  $v_{\mathbf{q}} \in T_k^1 Q$ .

De la segunda condición que acabamos de mencionar y de (4.10), para cada  $v_{\mathbf{q}} \in T_k^1 Q$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(v_{\mathbf{q}}, u_{\mathbf{q}}) &= \mathcal{H} \left( v_{\mathbf{q}}, u^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}} \right) = u^i \mathcal{H} \left( v_{\mathbf{q}}, \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} \right) \\ &= u^i \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} - N_A^j(v_{\mathbf{q}}, \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}}) \frac{\partial}{\partial v_A^j} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} \right). \end{aligned}$$

Así, definiendo las funciones

$$N_{Ai}^j(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}) = N_A^j(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, \left. \frac{\partial}{\partial q^i} \right|_{\mathbf{q}}), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad 1 \leq A \leq k$$

se obtiene el resultado buscado. □

Teniendo en cuenta la proposición anterior, tenemos que  $\mathcal{H}$  está localmente dado por:

$$\mathcal{H}(q^i, v_A^i, v^i) = (q^i, v_A^i, v^i, -v^i N_{Ai}^j)$$

donde  $N_{Ai}^j(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}) = N_A^j(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, \partial/\partial q^i)$ .

**Observación 4.10** La relación entre el subfibrado horizontal y la aplicación horizontal es bastante obvia. Si  $\mathcal{H} : T_k^1 Q \times_Q TQ \longrightarrow T(T_k^1 Q)$  es una aplicación horizontal para  $\tau_Q^k$ , entonces  $Im \mathcal{H}$  es un subfibrado horizontal de  $T(T_k^1 Q)$ . Recíprocamente, cada subfibrado horizontal de  $T(T_k^1 Q)$  puede obtenerse como la imagen de una aplicación horizontal.

Puesto que  $\widehat{\frac{\partial}{\partial q^i}}$  es una base local de  $Sec((\tau_Q^k)^* \tau_Q)$  (véase ítem **(2)** en sección 4.1.3), tenemos que una base local del subfibrado horizontal  $Im \mathcal{H}$  asociado a la aplicación  $\mathcal{H}$  viene dada por

$$H(T_k^1 Q) := Im \mathcal{H} = \left\langle \mathcal{H} \left( \widehat{\frac{\partial}{\partial q^i}} \right) \right\rangle_{1 \leq i \leq n} = \left\langle \left. \frac{\partial}{\partial q^i} \right|_{\mathbf{v}_{\mathbf{q}}} - N_{Ai}^j \frac{\partial}{\partial v_A^j} \right\rangle_{1 \leq i \leq n}.$$

Sea  $X \in \mathfrak{X}(Q)$  un campo de vectores en  $Q$ . Entonces el **levantamiento horizontal**  $X^h$  de  $X$  a  $\mathfrak{X}(T_k^1 Q)$  se define como sigue

$$X^h(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}) := (\mathcal{H} \widehat{X})(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}) = \mathcal{H}(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}, X(\mathbf{q})) = X^i \left( \left. \frac{\partial}{\partial q^i} \right|_{\mathbf{v}_{\mathbf{q}}} - N_{Ai}^j(\mathbf{v}_{\mathbf{q}}) \left. \frac{\partial}{\partial v_A^j} \right|_{\mathbf{v}_{\mathbf{q}}} \right). \quad (4.11)$$

#### 4.2.2. La aplicación $\mathcal{V} : T(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q$ .

En el apartado anterior hemos definido las aplicaciones horizontales  $\mathcal{H}$  como escisiones de una sucesión exacta corta. Por este motivo a cada  $\mathcal{H}$  le corresponde un único  $T_k^1 Q$ -morfismo de fibrados vectoriales

$$\mathcal{V} : T(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q$$

tal que

$$\mathcal{V} \circ \mathbf{i} = \text{id}_{T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q} \quad \text{y} \quad \mathcal{V} \circ \mathcal{H} = 0.$$

La aplicación  $\mathcal{V}$  que verifica las condiciones anteriores es la **retracción** asociada con  $\mathbf{i}$ , complementaria a  $\mathcal{H}$ . Entonces la sucesión

$$0 \longleftarrow T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \xleftarrow{\mathcal{V}} T(T_k^1 Q) \xleftarrow{\mathcal{H}} T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \longleftarrow 0$$

es también una sucesión exacta corta.

**Proposición 4.11** *En un sistema local de coordenadas la aplicación*

$$\mathcal{V} : T(T_k^1 Q) \longrightarrow T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q$$

*está definida por:*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} \right) &= N_{Ai}^j(v_{\mathbf{q}}) \left( v_{\mathbf{q}}, 0, \dots, \frac{\partial^A}{\partial q^j} \Big|_{\mathbf{q}}, \dots, 0 \right), \\ \mathcal{V} \left( \frac{\partial}{\partial v_A^j} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} \right) &= \left( v_{\mathbf{q}}, 0, \dots, \frac{\partial^A}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}}, \dots, 0 \right), \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde  $v_{\mathbf{q}} \in T_k^1 Q$ .

*Demostración:*

La aplicación  $\mathcal{V}$  verifica:

$$\mathcal{V} \circ \mathbf{i} = \text{id}_{T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q} \quad \text{y} \quad \mathcal{V} \circ \mathcal{H} = 0.$$

Entonces

$$0 = (\mathcal{V} \circ \mathcal{H})(v_{\mathbf{q}}, \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}}) = \mathcal{V} \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} - N_{Ai}^j \frac{\partial}{\partial v_A^j} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} \right) = \mathcal{V} \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} \right) - N_{Ai}^j \mathcal{V} \left( \frac{\partial}{\partial v_A^j} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} \right)$$

por tanto

$$\mathcal{V} \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} \right) = N_{Ai}^j \mathcal{V} \left( \frac{\partial}{\partial v_A^j} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} \right). \tag{4.13}$$

Calculemos ahora  $\mathcal{V}(\frac{\partial}{\partial v_A^j} \Big|_{v_q})$ .

$$\mathcal{V}(\frac{\partial}{\partial v_A^j} \Big|_{v_q}) = \mathcal{V}(\mathbf{i}(v_q, 0, \dots, \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_q, \dots, 0)) = (v_q, 0, \dots, \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_q, \dots, 0) \quad (4.14)$$

De (4.13) y (4.14) se obtiene (4.12).

□

### 4.2.3. El proyector horizontal $\mathbf{h}$ y el proyector vertical $\mathbf{v}$ .

A cualquier aplicación horizontal  $\mathcal{H} : T_k^1 Q \times_Q TQ \rightarrow T(T_k^1 Q)$  le asociamos los siguientes objetos geométricos:

(1) **El proyector horizontal**,  $\mathbf{h} := \mathcal{H} \circ \mathbf{j} : T(T_k^1 Q) \rightarrow T(T_k^1 Q)$ .

De las expresiones en coordenadas locales (4.7) y (4.9) de  $\mathbf{j}$  y  $\mathcal{H}$  respectivamente, deducimos que  $\mathbf{h}$  tiene la siguiente expresión local

$$\mathbf{h} = \left( \frac{\partial}{\partial q^i} - N_{Ai}^j \frac{\partial}{\partial v_A^j} \right) \otimes dq^i \quad (4.15)$$

y, además, verifica las siguientes propiedades

$$\mathbf{h}^2 = \mathbf{h}, \quad \text{Im } \mathbf{h} = \text{Im } \mathcal{H}, \quad \text{Ker } \mathbf{h} = V(T_k^1 Q),$$

entonces, de acuerdo con la siguiente definición,  $\mathbf{h}$  es un proyector horizontal para  $\tau_Q^k$ .

**Definición 4.12** *Un tensor  $\mathbf{h}$  de tipo  $(1, 1)$  en  $T_k^1 Q$  se dice un **proyector horizontal** para  $\tau_Q^k$ , si es un proyector con núcleo  $V(T_k^1 Q)$ , es decir,*

$$\mathbf{h}^2 = \mathbf{h} \quad \text{y} \quad \text{Ker } \mathbf{h} = V(T_k^1 Q)$$

**Lema 4.13** *Si  $\mathbf{h} \in \mathcal{T}_1^1(T_k^1 Q)$  es un proyector horizontal para  $\tau_Q^k$ , entonces existe una única aplicación horizontal  $\mathcal{H} : T_k^1 Q \times_Q TQ \rightarrow T(T_k^1 Q)$  para  $\tau_Q^k$  tal que  $\mathcal{H} \circ \mathbf{j} = \mathbf{h}$*



*Demostración:*

Véase Szilasi [131], Lema 1, página 72.

□

- (2) El **proyector vertical** inducido por  $\mathcal{H}$ ,  $\mathbf{v} := \text{id}_{T(T_k^1Q)} - \mathbf{h}$ . Trivialmente verifica

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} \circ \mathcal{V}, \quad \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}, \quad \text{Ker } \mathbf{v} = \text{Im } \mathcal{H}, \quad \text{Im } \mathbf{v} = V(T_k^1Q)$$

Además de la expresión local de  $\mathbf{h}$  obtenemos

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial v_A^j} \otimes (dv_A^j + N_{Ai}^j dq^i). \quad (4.16)$$

- (3) La **curvatura** de la aplicación horizontal  $\mathcal{H}$  se define como sigue

$$\begin{aligned} \Omega : \mathfrak{X}(T_k^1Q) \times \mathfrak{X}(T_k^1Q) &\rightarrow \mathfrak{X}(T_k^1Q) \\ (\xi, \eta) &\mapsto \Omega(\xi, \eta) = -\mathbf{v}[\mathbf{h}\xi, \mathbf{h}\eta] \end{aligned}$$

A partir de la definición de curvatura se observa que  $\Omega$  es antisimétrica, se anula sobre los campos de vectores verticales y su expresión local es

$$\Omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_{Ak}^j}{\partial q^i} - \frac{\partial N_{Ai}^j}{\partial q^k} + N_{Bk}^m \frac{\partial N_{Ai}^j}{\partial v_B^m} - N_{Bi}^m \frac{\partial N_{Ak}^j}{\partial v_B^m} \right) \frac{\partial}{\partial v_A^j} \otimes dq^i \wedge dq^k. \quad (4.17)$$

Mediante un cálculo en coordenadas locales se comprueba la siguiente identidad:

$$\Omega(X^h, Y^h) = [X, Y]^h - [X^h, Y^h]. \quad (4.18)$$

#### 4.2.4. Conexiones no lineales y estructura $k$ -tangente en $T_k^1Q$ .

En esta subsección vamos a dar una caracterización de las conexiones no-lineales en  $T_k^1Q$  en términos de la estructura  $k$ -tangente  $(J^1, \dots, J^k)$ . Los resultados que se expondrán a continuación son una generalización de los obtenidos por Grifone, para el caso  $k = 1$ , en [53].

Antes de enunciar la caracterización de la que acabamos de hablar vamos a probar el siguiente Lema.

**Lema 4.14** *Sea  $\Gamma$  un campo de tensores de tipo  $(1, 1)$  en  $T_k^1Q$  verificando*

$$J^A \circ \Gamma = -J^A \quad y \quad \Gamma \circ J^A = J^A, \quad 1 \leq A \leq k.$$

*Entonces,  $\Gamma$  es una estructura casi-producto, esto es,*

$$\Gamma^2 = I$$

*donde  $I$  es el tensor identidad de tipo  $(1, 1)$  en  $T_k^1Q$ .*

*Demostración:*

Se verifica

$$\Gamma^2 \circ J^A = \Gamma \circ \Gamma \circ J^A = \Gamma \circ J^A = J^A.$$

Por otra parte, para cada campo de vectores  $Z$  en  $T_k^1Q$  se verifica

$$J^A(\Gamma Z) = -J^A(Z)$$

entonces

$$J^A(\Gamma(Z) + Z) = 0,$$

esto es, el campo de vectores  $\Gamma(Z) + Z$  es vertical, por lo que se puede escribir como sigue:

$$\Gamma(Z) + Z = \sum_{B=1}^k J^B(W_B),$$

donde  $W_1, \dots, W_k$  son campos de vectores en  $T_k^1Q$ . De este modo obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma^2(Z) &= \Gamma(\Gamma(Z)) = \Gamma(-Z + \sum_{B=1}^k J^B(W_B)) = -\Gamma(Z) + \sum_{B=1}^k \Gamma(J^B(W_B)) \\ &= -\Gamma(Z) + \sum_{B=1}^k J^B(W_B) = Z, \end{aligned}$$

donde  $Z$  denota un campo de vectores arbitrario en  $T_k^1Q$ , entonces  $\Gamma^2 = I$ .

□

**Proposición 4.15** *La existencia de una conexión de Ehresmann (conexión no-lineal)  $N$  en  $T_k^1Q$  es equivalente a la existencia de un campo de tensores  $\Gamma$  en  $T_k^1Q$  de tipo  $(1, 1)$  verificando*

$$J^A \circ \Gamma = -J^A \quad y \quad \Gamma \circ J^A = J^A, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (4.19)$$

*Demostración:*

Sea  $N$  una conexión de Ehresmann en  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$  y  $\mathbf{h} : T(T_k^1 Q) \rightarrow H(T_k^1 Q)$  el proyector horizontal. Definimos

$$\Gamma = I - 2\mathbf{h},$$

donde  $I$  es el campo de tensores identidad de tipo  $(1, 1)$  en  $T_k^1 Q$ .

A partir de la definición anterior podemos afirmar que  $\Gamma$  es un tensor de tipo  $(1, 1)$  en  $T_k^1 Q$ , veamos ahora que  $\Gamma$  verifica las identidades (4.19).

Puesto que los tensores  $J^1, \dots, J^k$  se anulan sobre los campos de vectores verticales se verifica,

$$J^A(Z) = J^A(\mathbf{h}Z + \mathbf{v}Z) = J^A(\mathbf{h}Z),$$

entonces

$$J^A = J^A \circ \mathbf{h}, \quad 1 \leq A \leq k,$$

y por tanto

$$J^A \circ \Gamma = J^A - 2(J^A \circ \mathbf{h}) = J^A - 2J^A = -J^A, \quad 1 \leq A \leq k,$$

obteniendo así la primera familia de identidades de (4.19).

Por otra parte,

$$\Gamma \circ J^A = I \circ J^A - 2(\mathbf{h} \circ J^A) = J^A, \quad 1 \leq A \leq k,$$

ya que  $\mathbf{h} \circ J^A = 0$ . Con esto hemos demostrado que  $\Gamma$  satisface la segunda familia de identidades de (4.19).

Recíprocamente, vamos a comprobar ahora que si  $\Gamma$  un tensor de tipo  $(1, 1)$  en el fibrado vectorial  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$  verificando (4.19), entonces  $\Gamma$  define una conexión de Ehresmann en  $T_k^1 Q \rightarrow Q$ .

Definimos

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2}(I - \Gamma) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \frac{1}{2}(I + \Gamma).$$

Entonces se verifica

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^2 &= \mathbf{h} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h} \left( \frac{1}{2}(I - \Gamma) \right) = \frac{1}{2}(\mathbf{h} - \mathbf{h} \circ \Gamma) = \frac{1}{2}(\mathbf{h} - \frac{1}{2}(\Gamma - \Gamma^2)) \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{h} - \frac{1}{2}(\Gamma - I) \right) = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{h}) = \mathbf{h} \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\Gamma^2 = I$ , (véase lema anterior). Entonces  $\mathbf{h}^2 = \mathbf{h}$ . De modo análogo se comprueba que  $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}$ . Así,  $\mathbf{h}$  y  $\mathbf{v}$  son dos proyectores,  $\mathbf{h} + \mathbf{v} = I$  y

$$T(T_k^1 Q) = Im \mathbf{h} \oplus Im \mathbf{v} = H(T_k^1 Q) \oplus V(T_k^1 Q),$$

donde  $H(T_k^1 Q) = Im \mathbf{h}$  es la distribución horizontal y  $V(T_k^1 Q) = Im \mathbf{v}$  es la distribución vertical con respecto a la proyección canónica  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$ .

□

**Observación 4.16** Si reescribimos la proposición anterior en el caso particular  $k = 1$  obtenemos un resultado establecido por Grifone en [53].

◇

De (4.19) deducimos que, en un sistema local de coordenadas, el tensor  $\Gamma$  es de la forma

$$\Gamma = \left( -\frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma_{Ai}^j \frac{\partial}{\partial v_A^j} \right) \otimes dq^i + \frac{\partial}{\partial v_A^i} \otimes dv_A^i, \quad (4.20)$$

donde  $\Gamma_{Ai}^j$  son funciones definidas en  $T_k^1 Q$  a las denominamos *funciones componentes de  $\Gamma$* .

Sea  $\Gamma$  un tensor de tipo  $(1, 1)$  verificando (4.19) y  $\mathbf{h}$  el proyector horizontal asociado a  $\Gamma$  mediante la relación  $\Gamma = I - 2\mathbf{h}$ . Teniendo en cuenta las expresiones locales (4.15) y (4.20), de  $\mathbf{h}$  y  $\Gamma$  respectivamente, la relación entre las componentes de  $\Gamma$  y las componentes de la conexión no-lineal definida por  $\mathbf{h}$  viene dada por la relación

$$\Gamma_{Ai}^j = 2N_{Ai}^j.$$

### 4.3. Relación entre SOPDE's y conexiones no lineales.

En esta sección demostraremos que cada conexión no-lineal define una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, (SOPDE), en  $T_k^1 Q$  y recíprocamente cada SOPDE de  $T_k^1 Q$  nos permitirá definir una conexión no lineal.

## A. SOPDE asociado a una conexión no lineal.

Consideremos una conexión no-lineal en  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$ , como sabemos, esto es equivalente a considerar una aplicación horizontal  $\mathcal{H} : T_k^1 Q \times_Q TQ \rightarrow T(T_k^1 Q)$ .

Definimos el SOPDE  $\xi_{\mathcal{H}} = (\xi_{\mathcal{H}}^1, \dots, \xi_{\mathcal{H}}^k)$  asociado a  $\mathcal{H}$  por medio de las expresiones

$$\xi_{\mathcal{H}}^A := \mathcal{H} \circ \widehat{\delta}_A, \quad 1 \leq A \leq k,$$

esto es,

$$\begin{array}{ccccc} & & \xi_{\mathcal{H}}^A & & \\ & \nearrow & \text{---} & \searrow & \\ T_k^1 Q & \xrightarrow{\widehat{\delta}_A} & T_k^1 Q \times_Q TQ & \xrightarrow{\mathcal{H}} & T(T_k^1 Q) \end{array}$$

donde la aplicación  $\widehat{\delta}_A$  es la sección de  $(\tau_Q^k)^* \tau_Q : T_k^1 Q \times_Q TQ \rightarrow T_k^1 Q$  que hemos definido en (4.5).

Teniendo en cuenta las definiciones (4.5) y (4.9) de  $\widehat{\delta}_A$  y  $\mathcal{H}$  obtenemos que

$$\xi_{\mathcal{H}}^A(v_{\mathbf{q}}) = v_A^i \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} - N_{B^i}^k \frac{\partial}{\partial v_B^k} \Big|_{v_{\mathbf{q}}} \right) \quad . \quad (4.21)$$

## B. Conexión asociada a un SOPDE.

Recíprocamente a lo que hemos hecho en el apartado anterior, podemos asociar una aplicación horizontal  $\mathcal{H}_{\xi}$  a cada SOPDE  $\xi$ . Así obtenemos una conexión  $N_{\xi}$  asociada con  $\xi$ .

El esquema que vamos a seguir par definir una conexión no lineal asociada a un SOPDE es el siguiente:

A cada SOPDE le asociamos un proyector horizontal  $h_{\xi}$ . Este proyector horizontal nos permite definir una aplicación horizontal  $\mathcal{H}_{\xi}$  y una conexión  $N_{\xi}$ . Además, teniendo en cuenta la caracterización de las conexiones de Ehresman en términos de tensores de tipo  $(1, 1)$  que satisfacen ciertas propiedades, véase la proposición 4.15, podemos definir un tensor  $\Gamma_{\xi}$  de tipo  $(1, 1)$  verificando:

$$J^A \circ \Gamma_{\xi} = -J^A \quad \text{y} \quad \Gamma \circ J^A = J^A, \quad 1 \leq A \leq k.$$

**Teorema 4.17** *Cada SOPDE  $\xi$  en  $T_k^1 Q$  determina una aplicación horizontal  $\mathcal{H}_\xi$  para  $\tau_Q^k$  con proyector horizontal*

$$\mathbf{h}_\xi = \frac{1}{k+1} \left( I - \sum_{A=1}^k \mathcal{L}_{\xi_A} J^A \right). \quad (4.22)$$

*Demostración:*

Sea  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  un SOPDE en  $T_k^1 Q$  localmente dado por

$$\xi_A = v_A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (\xi_A)^j_B \frac{\partial}{\partial v_B^j}, \quad A = 1, \dots, k.$$

Teniendo en cuenta que para cada  $A = 1, \dots, k$

$$\mathcal{L}_{\xi_A} J^A(Z) = [\xi_A, J^A Z] - J^A [\xi_A, Z]$$

para todo campo de vectores  $Z$  en  $T_k^1 Q$  obtenemos:

$$\sum_{A=1}^k \mathcal{L}_{\xi_A} S^A = - \left( k \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{A=1}^k \frac{\partial(\xi_A)^j_B}{\partial v_A^i} \frac{\partial}{\partial v_B^j} \right) \otimes dq^i + \frac{\partial}{\partial v_B^i} \otimes dv_B^i$$

Mediante un cálculo directo a partir de (4.22) y la expresión anterior se obtiene que la expresión local de  $\mathbf{h}_\xi$  es la siguiente:

$$\mathbf{h}_\xi = \left( \frac{\partial}{\partial q^j} + \frac{1}{k+1} \sum_{A=1}^k \frac{\partial(\xi_A)^i_B}{\partial v_A^j} \frac{\partial}{\partial v_B^i} \right) \otimes dq^j. \quad (4.23)$$

A partir de esta expresión se observa que

$$\mathbf{h}_\xi^2 = \mathbf{h}_\xi \quad \text{y} \quad \text{Ker } \mathbf{h}_\xi = V(T_k^1 Q)$$

y así, de la definición 4.12 concluimos que  $\mathbf{h}_\xi$  es un proyector horizontal.

Finalmente, aplicando el Lemma 4.13 obtenemos que existe una aplicación horizontal  $\mathcal{H}_\xi$  con proyector horizontal asociado  $\mathbf{h}_\xi$ .

□

**Observación 4.18** En el caso  $k = 1$ , el proyector horizontal  $\mathbf{h}_\xi$  dado en (4.22), coincide con el proyector dado por Grifone [53, 55] y por Szilasi [131] .

◇

**Observación 4.19** En las secciones anteriores hemos visto que la existencia de un proyector horizontal  $\mathbf{h}$  es equivalente a la existencia de :

- i) una aplicación horizontal  $\mathcal{H} : T_k^1 Q \times_Q TQ \rightarrow T(T_k^1 Q)$ ,
- ii) o una conexión no lineal  $N$  en  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$  definida por un subfibrado horizontal  $H(T_k^1 Q)$ ,
- iii) o un tensor  $\Gamma$  de tipo  $(1, 1)$  en  $T_k^1 Q$  verificando ciertas condiciones.

Así teniendo en cuenta que cada SOPDE  $\xi$  nos permite definir un proyector horizontal, podemos describir, como indicaremos a continuación, los distintos elementos equivalentes: la aplicación horizontal  $\mathcal{H}_\xi$ , la conexión no-lineal  $N_\xi$  o el tensor  $\Gamma_\xi$ :

- (1) El Lema 4.13 nos permite asociar a cada proyector horizontal  $\mathbf{h}$  una aplicación horizontal  $\mathcal{H}$ . En este caso, la aplicación horizontal

$$\mathcal{H}_\xi : T_k^1 Q \times_Q TQ \rightarrow T(T_k^1 Q)$$

está definida a partir de la siguiente expresión local

$$\mathcal{H}_\xi(q^i, v_A^i, v^i) = (q^i, v_A^i, v^i, \frac{1}{k+1} v^j \sum_{A=1}^k \frac{\partial(\xi_A)^i_B}{\partial v_A^j} \Big|_{(q^k, v_C^k)}).$$

- (2) De (4.23) deducimos que las componentes de la conexión  $N_\xi$  son

$$(N_\xi)^i_{Bj}(q^k, v_C^k) = -\frac{1}{k+1} \sum_{A=1}^k \frac{\partial(\xi_A)^i_B}{\partial v_A^j} \Big|_{(q^k, v_C^k)} . \quad (4.24)$$

- (3) Como hemos visto en la Proposición 4.15, dar una conexión con proyector horizontal  $\mathbf{h}$  es equivalente a dar un tensor  $\Gamma$  de tipo  $(1, 1)$  en  $T_k^1 Q$  mediante la relación  $\Gamma = I - 2\mathbf{h}$ , siendo  $I$  el tensor identidad en  $T_k^1 Q$ .

En este caso, el tensor  $\Gamma_\xi = I - 2\mathbf{h}_\xi$  se define como sigue:

$$\Gamma_\xi = \frac{1}{k+1} \left( (k-1)I + 2 \sum_{A=1}^k \mathcal{L}_{\xi_A} J^A \right)$$

Observemos que en el caso  $k = 1$ , este campo de tensores es  $\Gamma_\xi = L_\xi J$ , donde  $J$  es la estructura tangente canónica de  $TQ$ . Esta conexión fue introducida por Grifone en la Proposición I.41 de [53] y en la Proposición 1.3 de [55]

◇

En esta sección hemos visto que a cada conexión no lineal definida en  $T_k^1Q$  le podemos asociar un SOPDE en  $T_k^1Q$  y, recíprocamente, a cada SOPDE una conexión no lineal. Es natural preguntarnos si esta relación es una biyección entre el conjunto de conexiones no-lineales en  $T_k^1Q$  y el conjunto de SOPDE's en  $T_k^1Q$ . En general la respuesta es negativa como veremos a continuación.

- (1) Consideremos un SOPDE  $\xi$ , la conexión no-lineal asociada a  $\xi$  y definida por la aplicación horizontal  $\mathcal{H}_\xi$  y el SOPDE  $\xi_{\mathcal{H}_\xi}$  asociado a  $\mathcal{H}_\xi$ . De (4.21) y (4.24) obtenemos que

$$\xi_{\mathcal{H}_\xi}^A = v_A^i \left( \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{1}{k+1} \sum_{C=1}^k \frac{\partial(\xi_C)_B^j}{\partial v_C^i} \frac{\partial}{\partial v_B^j} \right), \quad 1 \leq A \leq k.$$

Entonces  $\xi = \xi_{\mathcal{H}_\xi}$  si, y sólo si,  $\xi_A = \xi_{\mathcal{H}_\xi}^A$ ,  $1 \leq A \leq k$ , esto es, si y sólo si las funciones  $(\xi_A)_B^j$ ,  $1 \leq A, B \leq k$ ,  $1 \leq j \leq n$ , que definen el SOPDE  $\xi$  verifican la siguiente identidad:

$$(\xi_A)_B^j = \frac{1}{k+1} \sum_{C=1}^k \frac{\partial(\xi_C)_B^j}{\partial v_C^i} v_A^i, \quad 1 \leq A, B \leq k, \quad 1 \leq i \leq n.$$

En el caso particular  $k = 1$  obtenemos  $\xi_{\mathcal{H}_\xi} = \xi$  si, y sólo si,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \xi^k}{\partial v^i} v^i = \xi^k$$

lo que significa que las funciones  $\xi^k$  son homogéneas de grado 2 (véase [55]).



- (2) Consideremos ahora una conexión no-lineal  $N$  definida a partir de una aplicación horizontal  $\mathcal{H}$ , el SOPDE  $\xi_{\mathcal{H}}$  asociado a esta conexión y la conexión  $N_{\xi_{\mathcal{H}}}$  asociada al SOPDE  $\xi_{\mathcal{H}}$ .

Si denotamos por  $N_{Bi}^j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $1 \leq B \leq k$  las componentes de la conexión no-lineal  $N$ , entonces de (4.21) y (4.24) obtenemos que

$$(N_{\xi_{\mathcal{H}}})_{Bi}^j = -\frac{1}{k+1} \sum_{A=1}^k \frac{\partial(-v_A^l N_{Bl}^j)}{\partial v_A^i} = \frac{k}{k+1} N_{Bi}^j + \frac{1}{k+1} v_A^l \frac{\partial N_{Bl}^j}{\partial v_A^i}.$$

Entonces  $N = N_{\xi_{\mathcal{H}}}$  si, y sólo si,

$$N_{Bi}^j = v_A^l \frac{\partial N_{Bl}^j}{\partial v_A^i}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad 1 \leq B \leq k.$$

## 4.4. Linealización de campos de vectores de segundo orden.

En esta sección vamos a estudiar un tipo particular de SOPDE's así como ejemplos de SOPDE's linealizables para la ecuación del calor.

### 4.4.1. Linealización de SOPDE's.

**Definición 4.20** Un SOPDE  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  en  $T_k^1 Q$  se dice **linealizable** si, para cada punto de  $T_k^1 Q$ , existe un entorno de ese punto y una carta definida en ese entorno tal que

$$(\xi_A)^j_B = (\mathcal{A}_{AB}^j)_m^C v_C^m + (\mathcal{B}_{AB}^j)_m q^m + \mathcal{C}_{AB}^j \quad (4.25)$$

con  $(\mathcal{A}_{AB}^j)_m^C, (\mathcal{B}_{AB}^j)_m, \mathcal{C}_{AB}^j \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 4.21** Si  $\xi$  es linealizable entonces la curvatura de la conexión no-lineal  $\mathcal{H}_{\xi}$  se anula, y por tanto la conexión es integrable.

*Demostración:*

Puesto que  $\xi$  es linealizable, de (4.24) y (4.25) obtenemos que las componentes de la conexión no lineal  $\mathcal{H}_\xi$  son

$$(N_\xi)^i_{Bj} = -\frac{1}{k+1} \sum_{A=1}^k (\mathcal{A}^i_{AB})^A_j \quad .$$

Ahora, de (4.17) deducimos que la curvatura  $\Omega$  se anula y por tanto, que la distribución  $H_\xi(T_k^1 Q) := \text{Im } \mathcal{H}_\xi$  es integrable

□

Recordemos que los SOPDE's en  $T_k^1 Q$  son campos de  $k$ -vectores que se caracterizan porque sus secciones integrales son primeras prolongaciones

$$\phi^{(1)} : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$$

de aplicaciones  $\phi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$ , véase la proposición 1.42. En el caso particular de los SOPDE's linealizables, la proposición 1.42 puede escribirse como sigue:

**Proposición 4.22** *Sea  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  un SOPDE linealizable e integrable. Si*

$$\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$$

*es una sección integral de  $\xi$  entonces*

$$\varphi = \phi^{(1)},$$

*donde  $\phi^{(1)}$  es la primera prolongación de  $\phi = \tau_Q^k \circ \varphi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\varphi} T_k^1 Q \xrightarrow{\tau_Q^k} Q$ , y verifica*

$$\frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B}(\mathbf{t}) = (\xi_A)^j_B(\phi^{(1)}(\mathbf{t})) = (\mathcal{A}^j_{AB})^C_m \frac{\partial \phi^m}{\partial t^C} + (\mathcal{B}^j_{AB})_m \phi^m(\mathbf{t}) + \mathcal{C}^j_{AB} \quad (4.26)$$

*Recíprocamente, si  $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es una aplicación verificando (4.26), entonces  $\phi^{(1)}$  es una sección integral de  $\xi$ .*

### 4.4.2. Ejemplo: la ecuación de conducción del calor

En esta subsección vamos a calcular una familia de SOPDE's linealizables cuyas secciones integrales son primeras prolongaciones de soluciones de la ecuación de conducción del calor.

La ecuación de conducción del calor en dimensión 1 es

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} . \quad (4.27)$$

en donde  $\kappa$  es una constante que mide la difusión del calor y las soluciones  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  indican la temperatura, en cada instante de tiempo  $t^1 \equiv t$ , en el punto  $t^2 \equiv x$ . En este caso  $k = 2$ ,  $Q = \mathbb{R}$  ( $n = 1$ ).

Buscamos los SOPDE's linealizables asociados a esta ecuación.

La ecuación (4.26) para este caso es

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^A \partial t^B} = \mathcal{A}_{AB}^C \frac{\partial \phi}{\partial t^C} + \mathcal{B}_{AB} \phi + \mathcal{C}_{AB} , \quad 1 \leq A, B \leq 2 , \quad (4.28)$$

la cual se puede escribir como el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales en el que utilizamos la identificación  $t^1 = t$  y  $t^2 = x$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \mathcal{A}_{11}^1 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{A}_{11}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathcal{B}_{11} \phi + \mathcal{C}_{11} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} &= \mathcal{A}_{12}^1 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{A}_{12}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathcal{B}_{12} \phi + \mathcal{C}_{12} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} &= \mathcal{A}_{21}^1 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{A}_{21}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathcal{B}_{21} \phi + \mathcal{C}_{21} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \mathcal{A}_{22}^1 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{A}_{22}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathcal{B}_{22} \phi + \mathcal{C}_{22} \end{aligned} \quad (4.29)$$

y puesto que  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t}$  (condición de integrabilidad) entonces se tiene:

$$\mathcal{A}_{12}^2 = \mathcal{A}_{21}^1, \mathcal{A}_{12}^2 = \mathcal{A}_{21}^2, \mathcal{A}_{12}^2 = \mathcal{A}_{21}^1, \mathcal{B}_{12} = \mathcal{B}_{21}, \mathcal{C}_{12} = \mathcal{C}_{21} .$$

La solución general de la ecuación de conducción del calor (4.27) es

$$\phi(t, x) = e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \left[ C \cos \left( \frac{x}{\lambda} \right) + D \sin \left( \frac{x}{\lambda} \right) \right] = A e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \sin \left( \frac{x}{\lambda} + \delta \right)$$

donde  $\lambda$  es una constante,  $C$  y  $D$  son constantes arbitrarias, y  $A = \sqrt{C^2 + D^2}$ ,  $\tan \delta = \frac{C}{D}$ .

Sustituyendo la solución  $\phi$  en el sistema (4.29) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{\lambda^4} A e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \sin\left(\frac{x}{\lambda} + \delta\right) &= -\mathcal{A}_{11}^1 \frac{\kappa}{\lambda^2} A e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \sin\left(\frac{x}{\lambda} + \delta\right) + \mathcal{A}_{11}^2 \frac{1}{\lambda} A e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \cos\left(\frac{x}{\lambda} + \delta\right) \\ &\quad + \mathcal{B}_{11} A e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \sin\left(\frac{x}{\lambda} + \delta\right) + \mathcal{C}_{11} \\ -\frac{\kappa}{\lambda^3} A e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \cos\left(\frac{x}{\lambda} + \delta\right) &= -\mathcal{A}_{21}^1 \frac{\kappa}{\lambda^2} A e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \sin\left(\frac{x}{\lambda} + \delta\right) + \mathcal{A}_{21}^2 \frac{1}{\lambda} A e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \cos\left(\frac{x}{\lambda} + \delta\right) \\ &\quad + \mathcal{B}_{21} A e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \sin\left(\frac{x}{\lambda} + \delta\right) + \mathcal{C}_{21} \\ -\frac{1}{\lambda^2} A e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \sin\left(\frac{x}{\lambda} + \delta\right) &= -\mathcal{A}_{22}^1 \frac{\kappa}{\lambda^2} A e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \sin\left(\frac{x}{\lambda} + \delta\right) + \mathcal{A}_{22}^2 \frac{1}{\lambda^2} A e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \cos\left(\frac{x}{\lambda} + \delta\right) \\ &\quad + \mathcal{B}_{22} A e^{-\frac{\kappa}{\lambda^2} t} \sin\left(\frac{x}{\lambda} + \delta\right) + \mathcal{C}_{22} \end{aligned}$$

entonces obtenemos

$$\mathcal{A}_{11}^2 = 0 \quad , \quad \mathcal{A}_{22}^2 = 0 \quad , \quad \mathcal{A}_{21}^2 = -\frac{\kappa}{\lambda^2} \quad , \quad \mathcal{C}_{AB} = 0$$

$$\mathcal{B}_{11} = \frac{\kappa}{\lambda^2} \mathcal{A}_{11}^1 + \frac{\kappa^2}{\lambda^4} \quad , \quad \mathcal{B}_{12} = \mathcal{B}_{21} = \frac{\kappa}{\lambda^2} \mathcal{A}_{12}^1 \quad , \quad \mathcal{B}_{22} = \frac{\kappa}{\lambda^2} \mathcal{A}_{22}^1 - \frac{1}{\lambda^2} \quad .$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} (\xi_1)_1 &= \mathcal{A}_{11}^1 \left( v_1 + \frac{\kappa}{\lambda^2} q \right) + \frac{\kappa^2}{\lambda^4} q \\ (\xi_1)_2 &= (\xi_2)_1 = \mathcal{A}_{12}^1 \left( v_1 + \frac{\kappa}{\lambda^2} q \right) - \frac{\kappa}{\lambda^2} v_2 - \frac{\kappa}{\lambda^3} q \\ (\xi_2)_2 &= \mathcal{A}_{22}^1 \left( v_1 + \frac{\kappa}{\lambda^2} q \right) - \frac{1}{\lambda^2} q \end{aligned}$$

y una familia de SOPDE's lineales asociada a esta ecuación es  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ , con

$$\begin{aligned} \xi_1 &= v_1 \frac{\partial}{\partial q} + \left[ \mathcal{A}_{11}^1 \left( v_1 + \frac{\kappa}{\lambda^2} q \right) + \frac{\kappa^2}{\lambda^4} q \right] \frac{\partial}{\partial v_1} + \left[ \mathcal{A}_{12}^1 \left( v_1 + \frac{\kappa}{\lambda^2} q \right) - \frac{\kappa}{\lambda^2} v_2 - \frac{\kappa}{\lambda^3} q \right] \frac{\partial}{\partial v_2} \\ \xi_2 &= v_2 \frac{\partial}{\partial q} + \left[ \mathcal{A}_{12}^1 \left( v_1 + \frac{\kappa}{\lambda^2} q \right) - \frac{\kappa}{\lambda^2} v_2 - \frac{\kappa}{\lambda^3} q \right] \frac{\partial}{\partial v_1} + \left[ \mathcal{A}_{22}^1 \left( v_1 + \frac{\kappa}{\lambda^2} q \right) - \frac{1}{\lambda^2} q \right] \frac{\partial}{\partial v_2} \end{aligned}$$

De este modo podemos afirmar que las secciones integrales de este SOPDE son soluciones de la ecuación de difusión del calor.

## 4.5. Conexiones en $T_k^1 Q$ inducidas por una conexión lineal en $Q$ .

Denotamos por  $LQ$  el fibrado de referencias lineales sobre  $Q$ . Un punto  $u$  de  $LQ$  se puede denotar por medio de una familia  $(q, e_i)$  donde  $q \in Q$  y  $(e_1, \dots, e_n)_{\mathbf{q}}$  denota una referencia lineal en  $q$ .  $LQ$  se puede describir como la variedad de 1-jets,  $j_0^1 \varphi$ , en  $0 \in \mathbb{R}^n$  de difeomorfismos  $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Q$  definidos en un entorno de  $0 \in \mathbb{R}^n$ .

Denotamos por  $J_{0,0}^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ , la variedad de 1-jets, en  $0 \in \mathbb{R}^k$ ,  $j_{0,0}^1 \gamma$  de aplicaciones diferenciable  $\gamma : V_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definidas en un entorno de  $0 \in \mathbb{R}^n$ , tales que  $\gamma(0) = 0$ .

El grupo lineal general  $GL(n, \mathbb{R})$  puede describirse como la variedad de 1-jets,  $j_0^1 A$  de difeomorfismos  $A : W_0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definidos en un entorno de  $0 \in \mathbb{R}^n$ .

Veamos que  $T_k^1 Q = TQ \oplus \dots \oplus TQ \equiv J_0^1(\mathbb{R}^k, Q)$  es un fibrado vectorial asociado a  $LQ$  con fibra  $J_{0,0}^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ .

En efecto, consideramos la acción dada por

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) \times J_{0,0}^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) &\rightarrow J_{0,0}^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) \\ (j_0^1 A, j_0^1 \gamma) &\rightarrow j_0^1(A \circ \gamma) \end{aligned}$$

El fibrado asociado

$$E = LQ \times J_{0,0}^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) / GL(n, \mathbb{R}),$$

con proyección  $\pi_E : E \rightarrow Q$ ,  $\pi_E([j_0^1 \varphi, j_0^1 \gamma]) = \pi(j_0^1 \varphi) = \varphi(0)$ , es difeomorfo a  $T_k^1 Q \equiv J_0^1(\mathbb{R}^k, Q)$  a través de la aplicación

$$\begin{aligned} E &\rightarrow T_k^1 Q \\ [j_0^1 \varphi, j_0^1 \gamma] &\rightarrow j_0^1(\varphi \circ \gamma) \end{aligned}$$

Es bien conocido que si  $H_{j_0^1 \varphi}$ , siendo  $j_0^1 \varphi \in LQ$  es el subespacio horizontal de  $T_{j_0^1 \varphi}(LQ)$  definido por una conexión lineal  $\nabla$  en  $Q$ , el subespacio horizontal inducido  $Q_{j_0^1(\varphi \circ \gamma)}$  en  $T_k^1 Q$  definido por  $\nabla$  es

$$Q_{j_0^1(\varphi \circ \gamma)} \subset T_{j_0^1(\varphi \circ \gamma)}(T_k^1 Q) = T_{[j_0^1 \varphi, j_{0,0}^1 \gamma]}(T_k^1 Q)$$

dado por

$$Q_{j_0^1(\varphi \circ \gamma)} = (\Phi_{j_{0,0}^1 \gamma})_*(j_0^1 \varphi)(H_{j_0^1 \varphi})$$

Dado un punto  $j_0^1 f \in T_k^1 Q$ , existe  $j_0^1 \varphi \in LQ$  y  $j_{0,0}^1 \gamma \in J_{0,0}^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$  tales que  $j_0^1 f = [j_0^1 \varphi, j_{0,0}^1 \gamma] \in J_{0,0}^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ . en coordenadas locales,

$$j_0^1 \varphi \equiv (\varphi^i(0), \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \Big|_0) \equiv (q^i, x_j^i) \quad j_{0,0}^1 \gamma \equiv (\frac{\partial \gamma^i}{\partial t^A} \Big|_0) \equiv (\tilde{v}_A^i),$$

$$j_0^1(\varphi \circ \gamma) \equiv (\varphi^i(0), \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^j} \Big|_0 \frac{\partial \gamma^j}{\partial t^A} \Big|_0) = (q^i, x_j^i \tilde{v}_A^j) .$$

Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi_{j_{0,0}^1 \gamma} : LQ &\rightarrow T_k^1 Q \equiv J_0^1(\mathbb{R}^k, Q) \\ j_0^1 \varphi &\rightarrow j_0^1(\varphi \circ \gamma) \end{aligned}$$

está localmente dada por

$$\Phi_{\tilde{v}_A^i} : (q^i, x_j^i) \rightarrow (q^i, x_j^i \tilde{v}_A^i) = (q^i, v_A^i) \quad (4.30)$$

Una base de  $H_{j_0^1 \varphi}$  es

$$(\frac{\partial}{\partial q^i})^H = \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma_{il}^m x_s^l \frac{\partial}{\partial x_s^m}$$

y la base de  $Q_{j_0^1(\varphi \circ \gamma)} = T_{j_0^1(\varphi \circ \gamma)}(T_k^1 Q)$  es

$$(\Phi_{j_{0,0}^1 \gamma})_* (\frac{\partial}{\partial q^i})^H = \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma_{il}^m x_j^l \tilde{v}_A^j \frac{\partial}{\partial v_A^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma_{il}^m v_A^l \frac{\partial}{\partial v_A^i},$$

**Proposición 4.23** *Una conexión no lineal  $\mathcal{H}$  en  $T_k^1 Q$  es una conexión inducida por una conexión lineal en  $Q$  si, y sólo si, sus componentes son  $N_{Ai}^j = \Gamma_{im}^j v_A^m$ .*

En este caso el SOPDE asociado a  $\mathcal{H}$  es

$$(\xi_{\mathcal{H}})_A = v_A^i \left( \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma_{im}^j v_B^m \frac{\partial}{\partial v_B^j} \right) = v_A^i (\frac{\partial}{\partial q^i})^H,$$

y podemos demostrar la siguiente proposición:

**Proposición 4.24** Sea  $(Q, g)$  una variedad de Riemann. Definimos una función  $T$  en  $T_k^1 Q$  por

$$T : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) \rightarrow T(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = \sum_{A=1}^k g(\mathbf{q})(v_{A\mathbf{q}}, v_{A\mathbf{q}})$$

Sea  $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  y  $\phi^{(1)} : \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$  su primera prolongación. Si  $\phi^{(1)}$  es una sección integral de  $\xi_{\mathcal{H}}$ , el SOPDE asociado a la conexión de Levi-Civita, entonces  $\phi$  es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange con lagrangiano  $T$ , esto es,

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial T}{\partial v_A^i} \circ \phi^{(1)} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{(1)}} = 0 \quad . \quad (4.31)$$

*Demostración:*

Si  $\phi^{(1)} : \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$  es una sección integral de  $\xi_{\mathcal{H}}$  entonces

$$\frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} = -\Gamma_{rs}^j(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial \phi^r}{\partial t^A} \frac{\partial \phi^s}{\partial t^B} \quad (4.32)$$

Dado que la expresión local de  $T$  es  $T = \sum_{A=1}^k (1/2) g_{rs} v_A^r v_A^s$ , obtenemos que las ecuaciones (4.31) pueden escribirse como sigue

$$\sum_{A=1}^k \partial_k g_{ij}(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial \phi^k}{\partial t^A} \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} + g_{ij}(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial t^A \partial t^A} - \frac{1}{2} \partial_j g_{rs}(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial \phi^r}{\partial t^A} \frac{\partial \phi^s}{\partial t^A} = 0 \quad (4.33)$$

donde  $j = 1, \dots, k$  y  $\partial_k g_{ij} = \partial g_{ij} / \partial q^k$ . Ahora sustituyendo (4.32) en (4.33) obtenemos

$$\sum_{A=1}^k \partial_r g_{sj}(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial \phi^r}{\partial t^A} \frac{\partial \phi^s}{\partial t^A} - g_{ij}(\phi(\mathbf{t})) \Gamma_{rs}^i(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial \phi^r}{\partial t^A} \frac{\partial \phi^s}{\partial t^A} - \frac{1}{2} \partial_j g_{rs}(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial \phi^r}{\partial t^A} \frac{\partial \phi^s}{\partial t^A}$$

$$= \left( \sum_{A=1}^k \partial_r g_{sj}(\phi(\mathbf{t})) - g_{ij}(\phi(\mathbf{t})) \Gamma_{rs}^i(\phi(\mathbf{t})) - \frac{1}{2} \partial_j g_{rs}(\phi(\mathbf{t})) \right) \frac{\partial \phi^r}{\partial t^A} \frac{\partial \phi^s}{\partial t^A} = 0 \quad . \quad (4.34)$$

Por otra parte

$$\partial_r g_{sj} - \frac{1}{2} \partial_j g_{rs} - g_{ij} \Gamma_{rs}^i = \partial_r g_{sj} - \frac{1}{2} \partial_j g_{rs} - \frac{1}{2} (\partial_r g_{sj} + \partial_s g_{jr} - \partial_j g_{rs})$$

Entonces (4.34) es equivalente a la identidad

$$\frac{1}{2}(\partial_r g_{sj} - \partial_s g_{jr}) \frac{\partial \phi^r}{\partial t^A} \frac{\partial \phi^s}{\partial t^A} = 0$$

lo que se sigue de  $g_{ij} = g_{ji}$ .

□



## Capítulo 5

# Formulación $k$ -simpléctica en algebroides de Lie

En el primer capítulo de esta memoria hemos visto que la formulación  $k$ -simpléctica nos permite describir las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange y de Hamilton-De Donder-Weyl de las Teorías Clásicas de Campos de Primer Orden, obteniendo como caso particular la Mecánica Clásica.

Por otra parte, los algebroides de Lie suponen una generalización natural del concepto de espacio tangente a una variedad diferenciable, debido a ello son objetos adecuados para construir un formalismo lagrangiano de la Mecánica Clásica. Esto fue realizado por E. Martínez [96].

Surge así, de modo natural, la siguiente pregunta: ¿es posible desarrollar un formalismo  $k$ -simpléctico en el contexto de los algebroides de Lie, de modo que la formulación de la Mecánica Clásica sobre algebroides y la formulación  $k$ -simpléctica estándar se obtengan como casos particulares de dicha formulación? En este capítulo daremos una respuesta afirmativa a esta cuestión.

A lo largo de este capítulo vamos a considerar un algebroid de Lie  $(E, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_E, \rho)$  sobre la variedad  $Q$ .

## 5.1. Preliminares sobre algebroides de Lie.

En esta primera sección presentamos los hechos básicos más relevantes sobre algebroides de Lie, incluyendo resultados sobre cálculo diferencial y morfismos, los cuales serán necesarios para los desarrollos posteriores. Referimos al lector a [13, 57, 89, 90] para los detalles sobre algebroides de Lie y su papel en la geometría diferencial.

### 5.1.1. Definición de algebroide de Lie.

La estructura de algebroide de Lie es una generalización de la estructura de álgebra de Lie. También puede interpretarse como una generalización del concepto de fibrado tangente,  $TQ$ , de una variedad diferenciable  $Q$ .

Recordemos que el fibrado tangente  $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$  a la variedad  $Q$  es un fibrado vectorial en el que el espacio de secciones (o campos de vectores)  $\mathfrak{X}(Q)$ , está dotado de una estructura de álgebra de Lie. Estas dos propiedades, junto con una condición de compatibilidad entre ambas, serán usadas en la definición de algebroide de Lie.

**Definición 5.1** *Un algebroide de Lie sobre una variedad diferenciable  $Q$  es un fibrado vectorial real  $\tau : E \rightarrow Q$  sobre  $Q$  junto con un morfismo de fibrados vectoriales  $\rho : E \rightarrow TQ$ , sobre la identidad en  $Q$ , que induce una aplicación entre los espacios de secciones respectivos, que será denotada por la misma letra  $\rho : \text{Sec}(E) \rightarrow \mathfrak{X}(Q)$ , y una estructura de álgebra de Lie en el espacio de secciones de  $E$ ,*

$$[\![\cdot, \cdot]\!]_E : \text{Sec}(E) \times \text{Sec}(E) \rightarrow \text{Sec}(E)$$

tales que:

- (1)  $\rho : \text{Sec}(E) \rightarrow \mathfrak{X}(Q)$  es un homomorfismo de álgebras de Lie, esto es,

$$\rho([\![\sigma_1, \sigma_2]\!]_E) = [\rho(\sigma_1), \rho(\sigma_2)],$$

para cada par de secciones  $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Sec}(E)$ .

- (2) Para cada función  $f \in \mathcal{C}^\infty(Q)$  y cada par de secciones  $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Sec}(E)$ , se satisface la siguiente condición de compatibilidad

$$[\![\sigma_1, f\sigma_2]\!]_E = f[\![\sigma_1, \sigma_2]\!]_E + (\rho(\sigma_1)f)\sigma_2.$$

En la definición anterior hemos utilizado la notación  $\text{Sec}(E)$  para el espacio de las secciones del fibrado  $\tau : E \rightarrow Q$ , que es un  $\mathcal{C}^\infty(Q)$ -módulo. Además hemos denotado por  $\rho(\sigma_i)$ ,  $i = 1, 2$  el campo de vectores en  $Q$  definido por:  $\rho(\sigma_i)(\mathbf{q}) = \rho(\sigma_i(\mathbf{q}))$ .

El siguiente diagrama nos permite visualizar las aplicaciones que intervienen en la definición de algebroide de Lie:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\rho} & TQ \\ & \searrow \tau & \swarrow \tau_Q \\ & Q & \end{array}$$

La aplicación  $\rho$ , así como su asociada en el espacio de secciones,

$$\rho : \text{Sec}(E) \rightarrow \mathfrak{X}(Q),$$

recibirá el nombre de **ancla** del algebroide.

En este capítulo vamos a pensar un algebroide de Lie como un sustituto del fibrado tangente  $TQ$  de  $Q$ . De este modo, uno considera un elemento  $a$  de  $E$  como una velocidad generalizada, y la velocidad real  $v$  se obtiene como la imagen por la aplicación ancla de  $a$ , i.e.  $v = \rho(a)$ .

Vamos ahora a escribir algunas expresiones locales:

Consideremos un sistema local de coordenadas  $(q^i)_{1 \leq i \leq n}$  en una carta  $U \subset Q$  y  $\{e_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq m}$  una base local de secciones de  $\tau : E \rightarrow Q$ . Dado  $a \in E$  tal que  $\tau(a) = \mathbf{q}$ , podemos escribir  $a = y^\alpha(a)e_\alpha(\mathbf{q}) \in E_{\mathbf{q}}$ , así las coordenadas de  $a$  son  $(q^i(q), y^\alpha(a))$ .

En esta carta, la estructura de algebroide de Lie está determinada por las funciones  $\rho_\alpha^i, \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \in \mathcal{C}^\infty(U)$  definidas como sigue

$$\rho(e_\alpha) = \rho_\alpha^i \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad \llbracket e_\alpha, e_\beta \rrbracket_E = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma. \quad (5.1)$$

Las funciones  $\rho_\alpha^i$  y  $\mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma$  se llaman **funciones de estructura** del algebroide de Lie en el sistema de coordenadas antes citado.

De las propiedades del corchete de Lie  $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_E$  y de la aplicación ancla  $\rho$  se obtiene que estas funciones satisfacen las siguientes relaciones

$$\sum_{\text{cyclic}(\alpha, \beta, \gamma)} \left( \rho_\alpha^i \frac{\partial \mathcal{C}_{\beta\gamma}^\nu}{\partial q^i} + \mathcal{C}_{\alpha\mu}^\nu \mathcal{C}_{\beta\gamma}^\mu \right) = 0 \quad , \quad \rho_\alpha^j \frac{\partial \rho_\beta^i}{\partial q^j} - \rho_\beta^j \frac{\partial \rho_\alpha^i}{\partial q^j} = \rho_\gamma^i \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma, \quad (5.2)$$

que usualmente se conocen como **ecuaciones de estructura** del algebroide de Lie.

### 5.1.2. Ejemplos.

A continuación vamos a exponer algunos ejemplos de algebroides de Lie. Estos serán utilizados a lo largo del capítulo.

#### A. El algebroides tangente

El ejemplo trivial de algebroides de Lie se obtiene considerando

$$E = TQ \quad \text{y} \quad \rho = id_{TQ}.$$

Las secciones del algebroides son los campos de vectores sobre  $Q$ . La estructura de álgebra de Lie es la propia del conmutador de los campos de vectores, es decir,

$$[[X, Y]]_E = [X, Y] = XY - YX, .$$

#### B. Álgebras de Lie reales de dimensión finita.

Si elegimos  $Q$  como un único punto, de forma que  $TQ = \{0\}$ , y como  $E$  un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , dotamos a  $\mathfrak{g}$  con una estructura de algebroides de Lie considerando  $\rho = 0$ .

Las funciones de estructura se reducen, en este caso, a constantes ya que  $\rho_\alpha^i = 0$  y  $\mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma$  son precisamente las constantes de estructura del álgebra  $\mathfrak{g}$ .

#### C. El algebroides de una variedad de Poisson.

Sea  $(Q, \{\cdot, \cdot\})$  una variedad de Poisson. Existe un campo de bivectores (tensores 2-contravariantes antisimétricos),  $\Pi$ , tal que

$$\{f, g\} = \Pi(df, dg) .$$

El campo hamiltoniano correspondiente a la función  $f$  es el campo de vectores  $X_f$  definido por  $X_f(g) = \{g, f\}$ .

El campo de bivectores  $\Pi$  induce una aplicación de fibrados vectoriales sobre la identidad en la base  $Q$ ,  $\widehat{\Pi} : T^*Q \rightarrow TQ$ , definido por

$$\beta(\widehat{\Pi}(\alpha)) = \Pi(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in T_{\mathbf{q}}^*Q,$$

así como la correspondiente aplicación entre los respectivos espacios de secciones, que será denotada por la misma letra.

En particular, el campo de vectores hamiltoniano  $X_f$  se puede escribir como  $X_f = -\widehat{\Pi}(df)$ .

El fibrado cotangente  $T^*Q$  de una variedad de Poisson,  $Q$ , puede dotarse de una estructura de algebroide de Lie como sigue: el ancla y la estructura del álgebra de Lie en  $Sec(T^*Q)$  están definidas mediante las expresiones

$$\begin{aligned}\rho(\alpha) &= \widehat{\Pi}(\alpha), \\ \llbracket \alpha, \beta \rrbracket_{T^*Q} &= \mathcal{L}_{\widehat{\Pi}(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\widehat{\Pi}(\beta)}\alpha + d(\Pi(\alpha, \beta)),\end{aligned}$$

donde  $\alpha, \beta \in Sec(T^*Q)$  y  $\mathcal{L}_X$  denota la derivada de Lie. Es fácil comprobar que se satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned}\llbracket df, dg \rrbracket_{T^*Q} &= d\{f, g\}, \\ \widehat{\Pi}(\llbracket df, dg \rrbracket_{T^*Q}) &= \widehat{\Pi}(\llbracket df, dg \rrbracket_{T^*Q}).\end{aligned}$$

El ejemplo de algebroide que hemos descrito aquí se denomina **algebroide de Lie de la variedad de Poisson**  $(Q, \{\cdot, \cdot\})$ .

### 5.1.3. Diferencial exterior.

El paralelismo que existe entre un algebroide de Lie y el fibrado tangente de una variedad diferenciable se puede extender al marco del álgebra exterior y el cálculo diferencial de Cartan.

Dado un algebroide de Lie  $\tau : E \rightarrow Q$  sobre una variedad  $Q$ , las secciones de  $\tau$  juegan el papel de los campos de vectores sobre  $Q$ . Del mismo modo, las secciones del fibrado dual  $\tau^* : E^* \rightarrow Q$  jugarán el papel de las 1-formas. Análogamente, podemos pensar en secciones para la proyección de  $E^* \wedge \dots \wedge E^*$  sobre  $Q$ , lo que nos permitirá construir una álgebra exterior sobre  $E^*$ .

Denotaremos por

$$Sec(\bigwedge E^*) = \bigoplus_{l=0}^{rang E} Sec(\bigwedge^l E^*),$$

el conjunto de secciones del producto exterior de  $E^*$ , donde  $Sec(\bigwedge^l E^*)$  es el conjunto de secciones de

$$E^* \wedge \dots \wedge E^* \rightarrow Q.$$

La estructura de álgebra graduada en  $\text{Sec}(\bigwedge E^*)$ , es análoga al caso  $E^* = T^*Q$ . En particular se verifica  $\text{Sec}(\bigwedge^0 E^*) := \mathcal{C}^\infty(Q)$ .

Los elementos de  $\text{Sec}(\bigwedge E^*)$  se llamarán  **$E$ -formas**. Si  $\alpha \in \text{Sec}(\bigwedge^k E^*)$ , se llamará una  $E - k$ -forma, o simplemente una  $k$ -forma, cuando no exista riesgo de confusión con una forma exterior.

Veamos a continuación que, dado un algebroides  $E$  sobre  $Q$ , existe un operador diferencial lineal

$$d^E : \text{Sec}(\bigwedge^l E^*) \rightarrow \text{Sec}(\bigwedge^{l+1} E^*)$$

análogo a la diferencial exterior usual.

**Definición 5.2** Sean  $Q$  una variedad diferenciable y  $\tau : E \rightarrow Q$  un algebroides de Lie sobre  $Q$  con aplicación ancla  $\rho : \text{Sec}(E) \rightarrow \mathfrak{X}(Q)$ . Denotaremos por  $d^E$  el operador

$$d^E : \text{Sec}(\bigwedge^l E^*) \rightarrow \text{Sec}(\bigwedge^{l+1} E^*)$$

definido como sigue:

(1) Si  $f \in \mathcal{C}^\infty(Q)$ , entonces  $(d^E f)(\sigma) = \rho(\sigma)f$  para todo  $\sigma \in \text{Sec}(E)$ .

(2) Si  $\mu \in \text{Sec}(\bigwedge^1 E^*)$ , entonces

$$d^E \mu(\sigma_1, \sigma_2) = \rho(\sigma_1)(\mu(\sigma_2)) - \rho(\sigma_2)(\mu(\sigma_1)) - \mu([\sigma_1, \sigma_2]_E)$$

para todo par  $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Sec}(E)$ .

(3)  $(d^E)^2 = 0$ .

(4)  $d^E(\alpha \wedge \beta) = (d^E \alpha) \wedge \beta + (-1)^l \alpha \wedge (d^E \beta)$ , donde  $\alpha \in \text{Sec}(\bigwedge^l E^*)$ ,  $\beta \in \text{Sec}(\bigwedge^r E^*)$

Como consecuencia de la definición anterior se obtiene la siguiente fórmula para  $E$ -formas de cualquier grado.

**Proposición 5.3** Sean  $\mu \in \text{Sec}(\bigwedge^l E^*)$  y  $\sigma_1, \dots, \sigma_{l+1} \in \text{Sec}(E)$ . La  $(l+1)$ -forma  $d^E \mu$  se define como sigue:

$$\begin{aligned} d^E \mu(\sigma_1, \dots, \sigma_{l+1}) &= \sum_{i=1}^{l+1} (-1)^{i+1} \rho(\sigma_i)(\mu(\sigma_1, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_{l+1})) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \mu(\llbracket \sigma_i, \sigma_j \rrbracket_E, \sigma_1, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \widehat{\sigma}_j, \dots, \sigma_{l+1}). \end{aligned}$$

Consideremos ahora un sistema local de coordenadas en  $E$ . Si  $f \in \mathcal{C}^\infty(Q)$ , se verifica

$$d^E f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \rho_\alpha^i e^\alpha, \quad (5.3)$$

donde  $\{e^\alpha\}$  es la base dual de  $\{e_\alpha\}$ .

Por otra parte, si  $\mu \in \text{Sec}(E^*)$  y  $\mu = \mu_\gamma e^\gamma$  se sigue que

$$d^E \mu = \left( \frac{\partial \mu_\gamma}{\partial q^i} \rho_\beta^i - \frac{1}{2} \mu_\alpha \mathcal{C}_{\beta\gamma}^\alpha \right) e^\beta \wedge e^\gamma. \quad (5.4)$$

En particular,

$$d^E q^i = \rho_\alpha^i e^\alpha \quad \text{y} \quad d^E e^\gamma = -\frac{1}{2} \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma e^\alpha \wedge e^\beta,$$

donde  $\{e^\alpha\}$  es la base dual de  $\{e_\alpha\}$ .

El cálculo de Cartan usual se extiende al caso de algebroides de Lie como se indica a continuación.

Para cada sección  $\sigma$  de  $E$  consideramos la derivación de grado  $-1$  (contracción)

$$\iota_\sigma : \text{Sec}(\bigwedge^{l+1} E^*) \rightarrow \text{Sec}(\bigwedge^l E^*)$$

definida por

$$\iota_\sigma \mu(\sigma_1, \dots, \sigma_l) = \mu(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_l), \quad \sigma, \sigma_i \in \text{Sec}(E)$$

y una derivación de grado 0

$$\mathcal{L}_\sigma^E : \text{Sec}(\bigwedge^l E^*) \rightarrow \text{Sec}(\bigwedge^l E^*)$$

que se denomina derivada de Lie y que se define como sigue:

$$\mathcal{L}_\sigma^E = \iota_\sigma \circ d^E + d^E \circ \iota_\sigma, \quad \sigma \in \text{Sec}(E)$$

(para más detalles sobre estas derivaciones y sus propiedades, véase K. Mackenzie [89, 90]).

Obsérvese que si  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  entonces  $\sigma \in \text{Sec}(E) = \mathfrak{X}(Q)$  y se verifica que  $d^{TQ}$  y  $\mathcal{L}^{TQ}$  son la diferencial y la derivada de Lie usuales.

#### 5.1.4. Morfismos de algebroides de Lie.

**Definición 5.4** Sean  $(E, [\cdot, \cdot]_E, \rho)$  y  $(E', [\cdot, \cdot]_{E'}, \rho')$  dos algebroides de Lie sobre  $Q$  y  $Q'$ , respectivamente. Un morfismo de fibrados vectoriales  $\Phi = (\bar{\Phi}, \underline{\Phi})$  de  $E$  a  $E'$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & E' \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau' \\ Q & \xrightarrow{\underline{\Phi}} & Q' \end{array}$$

es un **morfismo de algebroides de Lie** si

$$d^E(\Phi^* \sigma') = \Phi^*(d^{E'} \sigma'), \quad (5.5)$$

para todo  $\sigma' \in \text{Sec}(\bigwedge^l(E')^*)$  y para todo  $l$ .

Obsérvese que en esta definición  $\Phi^* \sigma'$  es la sección del fibrado vectorial

$$\bigwedge^l E^* \rightarrow Q$$

definida por

$$(\Phi^* \sigma')_{\mathbf{q}}(a_1, \dots, a_l) = \sigma'_{\underline{\Phi}(\mathbf{q})}(\bar{\Phi}(a_1), \dots, \bar{\Phi}(a_l)), \quad (5.6)$$

para  $\mathbf{q} \in Q$  y  $a_1, \dots, a_l \in E_{\mathbf{q}}$ .

En el caso particular  $Q = Q'$  y  $\underline{\Phi} = id_Q$  se puede demostrar que  $(\bar{\Phi}, id_Q)$  es un morfismo de algebroides de Lie si, y sólo si,

$$[\bar{\Phi} \circ \sigma_1, \bar{\Phi} \circ \sigma_2]_{E'} = \bar{\Phi}[\sigma_1, \sigma_2]_E \quad \text{y} \quad \rho'(\bar{\Phi} \circ \sigma) = \rho(\sigma),$$



donde  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \text{Sec}(E)$ .

Establecemos a continuación algunas expresiones locales relativas a los morfismos de algebroides de Lie.

Sean  $(q^i)$  y  $(q'^i)$  dos sistemas locales de coordenadas en  $Q$  y  $Q'$ , respectivamente y sean  $\{e_\alpha\}$  y  $\{e'_\alpha\}$  una base local de secciones de  $E$  y  $E'$ , respectivamente, siendo  $\{e^\alpha\}$  y  $\{e'^\alpha\}$  las bases duales correspondientes. La aplicación  $\Phi = (\bar{\Phi}, \underline{\Phi})$  está determinada por las relaciones

$$\Phi^* q'^i = \phi^i(\mathbf{q}) \quad \text{y} \quad \Phi^* e'^\alpha = \phi_\beta^\alpha e^\beta$$

para ciertas funciones locales  $\phi^i$  y  $\phi_\beta^\alpha$  en  $Q$ . Entonces  $\Phi = (\bar{\Phi}, \underline{\Phi})$  es un morfismo de algebroides de Lie si, y sólo si,

$$\rho_\alpha^j \frac{\partial \phi^i}{\partial q^j} = \rho_\beta'^i \phi_\alpha^\beta, \quad (5.7)$$

$$\phi_\gamma^\beta \mathcal{C}_{\alpha\delta}^\gamma = \left( \rho_\alpha^i \frac{\partial \phi_\delta^\beta}{\partial q^i} - \rho_\delta^i \frac{\partial \phi_\alpha^\beta}{\partial q^i} \right) + \mathcal{C}_{\theta\sigma}'^\beta \phi_\alpha^\theta \phi_\delta^\sigma. \quad (5.8)$$

En estas expresiones  $\rho_\alpha^i, \mathcal{C}_{\beta\gamma}^\alpha$  son las funciones de estructura de  $E$  y  $\rho_\alpha'^i, \mathcal{C}'_{\alpha\beta\gamma}$  son las funciones de estructura de  $E'$ .

## 5.2. La prolongación de un algebroides de Lie mediante una fibración.

A continuación, vamos a recordar el concepto de la prolongación de un algebroides de Lie mediante una fibración (véase [57, 72]).

En el desarrollo de la Mecánica lagrangiana Autónoma en algebroides de Lie, véase E. Martínez [96], este ejemplo juega el papel del fibrado tangente del fibrado tangente de una variedad.

Además este espacio será fundamental en la formulación  $k$ -simplética en algebroides de Lie, (véase la Observación 5.10 y las secciones 5.3 y 5.4).

Para más detalles sobre los contenidos de este apartado véase [24, 57, 72, 96, 98] y las referencias citadas en ellos.

Sean  $(E, [\cdot, \cdot]_E, \rho)$  un algebroides de Lie de rango  $m$  sobre una variedad  $Q$  de dimensión  $n$  y  $\pi : P \rightarrow Q$  una fibración, esto es, una submersión sobreyectiva.

Denotemos por  $\mathcal{T}^E P$  el espacio total del pull-back de  $T\pi : TP \rightarrow TQ$  por  $\rho: E \rightarrow TQ$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^E P \equiv E \times_{TQ} TP & \longrightarrow & TP \\ \downarrow & & \downarrow T\pi \\ E & \xrightarrow{\rho} & TQ \end{array}$$

esto es,

$$\mathcal{T}^E P = \{(b, v_{\mathbf{p}}) \in E \times TP \mid \rho(b) = T\pi(v_{\mathbf{p}})\} \quad (5.9)$$

donde  $T\pi : TP \rightarrow TQ$  denota la aplicación tangente a  $\pi$ .

Nosotros vamos a considerar un fibrado vectorial con espacio total  $\mathcal{T}^E P$  pero no el fibrado pull-back sino un fibrado sobre  $P$  que definiremos a continuación.

Denotaremos por  $\tilde{\tau}_P : \mathcal{T}^E P \equiv E \times_{TQ} TP \rightarrow P$  la aplicación definida por

$$\tilde{\tau}_P(b, v_{\mathbf{p}}) = \tau_P(v_{\mathbf{p}}) = \mathbf{p},$$

donde  $(b, v_{\mathbf{p}}) \in \mathcal{T}^E P$ , y  $\tau_P : TP \rightarrow P$  es la proyección canónica.

Si  $\mathbf{p}$  es un punto de  $P$ , se sigue que

$$(\tilde{\tau}_P)^{-1}(\mathbf{p}) = (\mathcal{T}^E P)_{\mathbf{p}} = E_{\pi(\mathbf{p})} \times_{TQ} (T_{\mathbf{p}} P) = \{(b, v_{\mathbf{p}}) \in E_{\pi(\mathbf{p})} \times T_{\mathbf{p}} P \mid \rho(b) = T_{\mathbf{p}} \pi(v_{\mathbf{p}})\}$$

es un subespacio vectorial de  $E_{\pi(\mathbf{p})} \times T_{\mathbf{p}} P$ , donde  $E_{\pi(\mathbf{p})}$  denota la fibra de  $E$  sobre el punto  $\pi(\mathbf{p}) \in Q$ . Además, si  $n'$  es la dimensión de  $P$ , se puede probar que

$$\dim(\mathcal{T}^E P)_{\mathbf{p}} = m + n' - n.$$

Así concluimos que  $\tilde{\tau}_P : \mathcal{T}^E P \rightarrow P$  es un fibrado vectorial sobre  $P$  de rango  $m + n' - n$ .

La suma y el producto por números reales están definidos, en este espacio vectorial, como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} (a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}}) + (a'_{\pi(\mathbf{p})}, v'_{\mathbf{p}}) &= (a_{\pi(\mathbf{p})} + a'_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}} + v'_{\mathbf{p}}), \\ \lambda(a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}}) &= (\lambda a_{\pi(\mathbf{p})}, \lambda v_{\mathbf{p}}). \end{aligned}$$

Tenemos así definido un fibrado vectorial  $(\mathcal{T}^E P, \tilde{\tau}_P, P)$  a través de la proyección

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_P : \mathcal{T}^E P \equiv E \times_{TQ} TP &\rightarrow P \\ (a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}}) &\mapsto \tilde{\tau}_P(a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}}) = \tau_P(v_{\mathbf{p}}) = \mathbf{p} \end{aligned}$$

**Definición 5.5** Sea  $E$  un algebroid de Lie sobre  $Q$  y  $\pi : P \rightarrow Q$  una fibración. Se llama **prolongación del algebroid de Lie  $E$  mediante la fibración  $\pi$**  al fibrado vectorial  $(\mathcal{T}^E P, \tilde{\tau}_P, P)$ .

El siguiente diagrama recoge las diferentes proyecciones definidas a partir de  $\mathcal{T}^E P$ , que serán utilizadas en el resto del capítulo.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{\tau}_P & & \\
 & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\
 \mathcal{T}^E P \equiv E \times_{TQ} TP & \xrightarrow{\rho^\pi} & TP & \xrightarrow{\tau_P} & P \\
 \downarrow \tilde{\tau}_1 & & \downarrow T\pi & & \downarrow \pi \\
 E & \xrightarrow{\rho} & TQ & \xrightarrow{\tau_Q} & Q
 \end{array}$$

donde

$$\tilde{\tau}_1(a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}}) = a_{\pi(\mathbf{p})} \quad , \quad \rho^\pi(a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}}) = v_{\mathbf{p}} \quad , \quad \tilde{\tau}_P(a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}}) = \mathbf{p}, \quad (5.10)$$

siendo  $a_{\pi(\mathbf{p})} \in E$ ,  $v_{\mathbf{p}} \in T_{\mathbf{p}}P$  y  $\mathbf{p} \in P$ .

A continuación vamos a describir algunos objetos relacionados con  $\mathcal{T}^E P$ .

**A. Coordenadas locales en  $\mathcal{T}^E P$ .**

Con el fin de introducir las coordenadas locales en la prolongación de un algebroid de Lie,  $\mathcal{T}^E P$ , consideramos los siguientes sistemas de coordenadas locales:

$$\begin{aligned}
 (q^i)_{1 \leq i \leq n} & \quad \text{en un abierto } U \subset Q \\
 (q^i, u^\ell)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \ell \leq n'} & \quad \text{en } \pi^{-1}(U) \subset P \\
 (q^i, y^\alpha)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m} & \quad \text{en } \tau^{-1}(U) \subset E
 \end{aligned}$$

y además, sea

$$\{e_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq m}$$

una base local de secciones de  $\tau : E \rightarrow Q$ .

Sea ahora  $(a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}})$  un elemento arbitrario de  $\mathcal{T}^E P \equiv E \times_{TQ} TP$ , entonces de la definición de  $\mathcal{T}^E P$ , véase (5.9), se deducen las tres propiedades siguientes:

(i)  $a_{\pi(\mathbf{p})} \in E$  y además se escribe como sigue:

$$a_{\pi(\mathbf{p})} = y^\alpha(a_{\pi(\mathbf{p})})e_\alpha(\pi(\mathbf{p})) . \quad (5.11)$$

(ii)  $v_{\mathbf{p}} \in TP$  de modo que se puede escribir

$$v_{\mathbf{p}} = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{p}} + w^\ell \frac{\partial}{\partial u^\ell} \Big|_{\mathbf{p}} . \quad (5.12)$$

(iii) Además se verifica

$$\rho(a_{\pi(\mathbf{p})}) = T_{\mathbf{p}}\pi(v_{\mathbf{p}}) . \quad (5.13)$$

Veamos qué significa esta última condición.

Teniendo en cuenta las expresiones locales (5.11), (5.12) y las dos identidades siguientes

$$\rho(a_{\pi(\mathbf{p})}) = \rho(y^\alpha(a_{\pi(\mathbf{p})})e_\alpha(\pi(\mathbf{p}))) = y^\alpha(a_{\pi(\mathbf{p})})\rho_\alpha^i(\pi(\mathbf{p}))\frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\pi(\mathbf{p})}$$

y

$$T_{\mathbf{p}}\pi(v_{\mathbf{p}}) = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\pi(\mathbf{p})} ,$$

tenemos que la condición (5.13) es equivalente a

$$v^i = y^\alpha(a_{\pi(\mathbf{p})})\rho_\alpha^i(\pi(\mathbf{p})) . \quad (5.14)$$

Por lo tanto, a partir de (5.11), (5.12) y (5.14) se obtiene que el sistema de coordenadas locales inducido en  $\mathcal{T}^E P$  es

$$(q^i, u^\ell, z^\alpha, w^\ell)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \ell \leq n', 1 \leq \alpha \leq m}$$

donde

$$\begin{aligned} q^i(a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}}) &= q^i(\pi(\mathbf{p})) , & u^\ell(a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}}) &= u^\ell(\mathbf{p}) , \\ z^\alpha(a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}}) &= y^\alpha(a_{\pi(\mathbf{p})}) , & w^\ell(a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}}) &= v_{\mathbf{p}}(u^\ell) . \end{aligned} \quad (5.15)$$

**B. Base local de secciones del fibrado prolongación  $\mathcal{T}^E P$ .**

Consideremos un sistema de coordenadas locales adaptadas

$$(q^i, u^\ell)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \ell \leq n'}$$

en un abierto de  $P$  y una base local  $\{e_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq m}$  de secciones de  $\tau : E \rightarrow Q$ . Con estos elementos se puede demostrar la siguiente proposición, véase E. Martínez [96]:

**Proposición 5.6** *El conjunto*

$$\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\ell\}_{1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq \ell \leq n'}$$

definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\alpha: P &\rightarrow \mathcal{T}^E P \equiv E \times_{TQ} TP \\ \mathbf{p} &\mapsto \mathcal{X}_\alpha(\mathbf{p}) = (e_\alpha(\pi(\mathbf{p})); \rho_\alpha^i(\pi(\mathbf{p})) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{p}}) \\ \mathcal{V}_\ell: P &\rightarrow \mathcal{T}^E P \equiv E \times_{TQ} TP \\ \mathbf{p} &\mapsto \mathcal{V}_\ell(\mathbf{p}) = (0_{\pi(\mathbf{p})}; \frac{\partial}{\partial u^\ell} \Big|_{\mathbf{p}}), \end{aligned} \tag{5.16}$$

es una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_P : \mathcal{T}^E P \rightarrow P$ .

A partir de ahora denotaremos por  $\text{Sec}(\mathcal{T}^E P)$  el conjunto de secciones de la proyección  $\tilde{\tau}_P : \mathcal{T}^E P \rightarrow P$ .

C. La aplicación ancla en  $\mathcal{T}^E P$ .

En este apartado asociaremos un campo de vectores en  $P$  a cada sección de  $\mathcal{T}^E P$ , por medio de la aplicación  $\rho^\pi : \mathcal{T}^E P \rightarrow TP$ .

Esta correspondencia será fundamental para desarrollar la formulación  $k$ -simpléctica en algebroides de Lie.

**Lema 5.7** *La aplicación*

$$\begin{aligned} \rho^\pi: \mathcal{T}^E P \equiv E \times_{TQ} TP &\rightarrow TP \\ (a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}}) &\mapsto \rho^\pi(a_{\pi(\mathbf{p})}, v_{\mathbf{p}}) = v_{\mathbf{p}}, \end{aligned}$$

permite asociar a cada  $Z : P \rightarrow \mathcal{T}^E P$ , sección de  $\tilde{\tau}_P : \mathcal{T}^E P \rightarrow P$ , un campo de vectores en  $P$  a través de la composición que muestra el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^E P & \xrightarrow{\rho^\pi} & TP \\ \uparrow Z & \nearrow \rho^\pi \circ Z & \\ P & & \end{array}$$

esto es, el campo de vectores asociado a  $Z$  es  $\rho^\pi \circ Z$ .

Si una sección  $Z$  tiene la expresión local

$$Z = Z^\alpha \mathcal{X}_\alpha + V^\ell \mathcal{V}_\ell \in \text{Sec}(\mathcal{T}^E P)$$

entonces la expresión en coordenadas del campo de vectores asociado es la siguiente, (véase por ejemplo [24]):

$$\rho^\pi(Z) = \rho_\alpha^i Z^\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + V^\ell \frac{\partial}{\partial u^\ell} \in \mathfrak{X}(P). \quad (5.17)$$

De este modo se observa que la aplicación  $\rho^\pi$  induce un homomorfismo de  $\mathcal{C}^\infty(P)$ -módulos

$$\rho^\pi: \text{Sec}(\mathcal{T}^E P) \rightarrow \mathfrak{X}(P).$$

Esta aplicación  $\rho^\pi$  va a ser el ancla en la estructura de algebroide de Lie de  $\mathcal{T}^E P$ .

D. Corchete de Lie de secciones de  $\mathcal{T}^E P$ .

La estructura de álgebra de Lie del espacio  $\text{Sec}(E)$  de secciones de  $\tau: E \rightarrow Q$ , permite definir un corchete de Lie en términos de secciones proyectables de  $\mathcal{T}^E P$ .

**Definición 5.8** Una sección  $Z$  de  $\mathcal{T}^E P$  se dice **proyectable** si existe una sección  $\sigma$  de  $\tau: E \rightarrow Q$  de modo que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{Z} & \mathcal{T}^E P \equiv E \times_{TQ} TP \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\tau}_1 \\ Q & \xrightarrow{\sigma} & E \end{array}$$

esto es,  $\sigma \circ \pi = \tilde{\tau}_1 \circ Z$ .

Equivalentemente, una sección  $Z$  es proyectable si, y sólo si, es de la forma

$$Z(\mathbf{p}) = (\sigma(\pi(\mathbf{p})), X(\mathbf{p})),$$

para alguna sección  $\sigma$  de  $\tau: E \rightarrow Q$  y algún campo de vectores  $X$  en  $P$ .

**Definición 5.9** Se define el corchete de Lie  $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket^\pi$  de dos secciones proyectables  $Z$  y  $Z'$  como sigue:

$$\llbracket Z, Z' \rrbracket^\pi(\mathbf{p}) = (\llbracket \sigma, \sigma' \rrbracket_E(\mathbf{q}), [X, X'](\mathbf{p})), \quad (5.18)$$

en donde  $Z(\mathbf{p}) = (\sigma(\mathbf{q}), X(\mathbf{p}))$ ,  $Z'(\mathbf{p}) = (\sigma'(\mathbf{q}), X'(\mathbf{p}))$ ,  $\mathbf{p} \in P$  y  $\mathbf{q} = \pi(\mathbf{p})$ .

Puesto que cualquier sección de  $\mathcal{T}^E P$  se puede expresar localmente como una combinación lineal de las secciones proyectables  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\ell\}$ , la definición del corchete de Lie se puede extender a secciones arbitrarias de  $\mathcal{T}^E P$ .

El corchete de Lie de los elementos de la base local  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\ell\}$  se muestra a continuación:

$$[\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta]^\pi = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}_\gamma \quad [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\ell]^\pi = 0 \quad [\mathcal{V}_\ell, \mathcal{V}_\ell]^\pi = 0, \quad (5.19)$$

donde  $1 \leq \alpha \leq m$  y  $1 \leq \ell \leq n'$ .

E. Estructura de algebroide de Lie de  $\mathcal{T}^E P$ .

El fibrado vectorial  $\tilde{\tau}_P : \mathcal{T}^E P \equiv E \times_{TQ} TP \rightarrow P$  está dotado de una estructura de algebroide de Lie dada por:

- (1) La aplicación ancla es  $\rho^\pi : \mathcal{T}^E P \rightarrow TP$ ,  $\rho^\pi(b, v_{\mathbf{p}}) = v_{\mathbf{p}}$ .
- (2) El corchete de Lie  $[\cdot, \cdot]^\pi : \text{Sec}(\mathcal{T}^E P) \times \text{Sec}(\mathcal{T}^E P) \rightarrow \text{Sec}(\mathcal{T}^E P)$  es la aplicación que se ha introducido en el apartado D de esta sección.

La demostración de que  $(\mathcal{T}^E P, [\cdot, \cdot]^\pi, \rho^\pi)$  es un algebroide de Lie puede encontrarse en P.J. Higgins, K. Mackenzie [57], donde este espacio se denomina *el algebroide de Lie imagen inversa de E sobre  $\pi$* .

Por ser  $(\mathcal{T}^E P, [\cdot, \cdot]^\pi, \rho^\pi)$  un algebroide de Lie está definida la diferencial exterior, (véase la sección 5.1.3 para la definición de la diferencial exterior en un algebroide de Lie arbitrario). Esta diferencial

$$d^{\mathcal{T}^E P} : \text{Sec}\left(\bigwedge^l (\mathcal{T}^E P)^*\right) \rightarrow \text{Sec}\left(\bigwedge^{l+1} (\mathcal{T}^E P)^*\right)$$

está determinada por las relaciones

$$\begin{aligned} d^{\mathcal{T}^E P} q^i &= \rho_\alpha^i \mathcal{X}^\alpha, & d^{\mathcal{T}^E P} u^\ell &= \mathcal{V}^\ell \\ d^{\mathcal{T}^E P} \mathcal{X}^\gamma &= -\frac{1}{2} \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{X}^\beta, & d^{\mathcal{T}^E P} \mathcal{V}^\ell &= 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde  $\{\mathcal{X}^\alpha, \mathcal{V}^\ell\}$  es la base dual de  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\ell\}$ .

**Observación 5.10** En la descripción de la formulación  $k$ -simplética en algebroides de Lie la prolongación de un algebroide de Lie,  $\mathcal{T}^E P$ , jugará un papel fundamental.

En concreto vamos a utilizar dos casos particulares de la prolongación de un algebroide de Lie. El primero de ellos, correspondiente con la formulación lagrangiana, será con

$$P = E \oplus \cdot^k \cdot \oplus E,$$

en este caso la suma de Whitney

$$\mathcal{T}^E(E \oplus \cdot^k \cdot \oplus E) \oplus \cdot^k \cdot \oplus \mathcal{T}^E(E \oplus \cdot^k \cdot \oplus E)$$

que denotaremos como  $(\mathcal{T}^E)_k^1(E \oplus \cdot^k \cdot \oplus E)$  jugará el papel de

$$T_k^1(T_k^1 Q) = T(TQ \oplus \cdot^k \cdot \oplus TQ) \oplus \cdot^k \cdot \oplus T(TQ \oplus \cdot^k \cdot \oplus TQ)$$

en el formalismo lagrangiano  $k$ -simplético estándar.

El segundo caso que vamos a considerar es

$$P = E^* \oplus \cdot^k \cdot \oplus E^*$$

y en este caso

$$\mathcal{T}^E(E^* \oplus \cdot^k \cdot \oplus E^*) \oplus \cdot^k \cdot \oplus \mathcal{T}^E(E^* \oplus \cdot^k \cdot \oplus E^*) = (\mathcal{T}^E)_k^1(E^* \oplus \cdot^k \cdot \oplus E^*)$$

jugará el papel de

$$T_k^1((T_k^1)^* Q) = T(T^* Q \oplus \cdot^k \cdot \oplus T^* Q) \oplus \cdot^k \cdot \oplus T(T^* Q \oplus \cdot^k \cdot \oplus T^* Q)$$

en el formalismo hamiltoniano  $k$ -simplético estándar.

◇

### 5.3. Formalismo lagrangiano $k$ -simplético en algebroides de Lie.

En esta sección extendemos el formalismo lagrangiano  $k$ -simplético que se ha descrito en la Sección 1.2 del Capítulo 1, al contexto que nos proporcionan los algebroides de Lie. Para ello, la idea fundamental es sustituir el fibrado tangente  $TQ$  por un algebroide de Lie  $E$ .



### 5.3.1. Elementos geométricos.

En esta subsección vamos a describir los elementos geométricos que son necesarios para desarrollar el formalismo lagrangiano  $k$ -simpléctico en algebroides de Lie.

A. La variedad  $\bigoplus^k E$ .

La formulación  $k$ -simpléctica de las de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange, descrita en el Capítulo 1, se desarrolla en el fibrado tangente de las  $k^1$ - velocidades de una variedad  $Q$ , esto es, en  $T_k^1 Q$ , la suma de Whitney de  $k$  copias del fibrado tangente.

Si pensamos un algebroides de Lie  $E$  como un sustituto del fibrado tangente, es natural pensar que, en esta situación, la suma de Whitney de  $k$  copias del algebroides va a jugar el papel de  $T_k^1 Q$ .

Denotaremos por  $\bigoplus^k E$  la suma de Whitney de  $k$  copias del algebroides de Lie  $E$ , esto es,

$$\bigoplus^k E = E \oplus \dots \oplus E.$$

Así los elementos de  $\bigoplus^k E$  vienen dados por  $k$ -tuplas  $a_{\mathbf{q}} = (a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}})$  de elementos de la fibra  $E_{\mathbf{q}}$  de  $E$  sobre un mismo punto  $\mathbf{q} \in Q$ , donde recordemos que  $Q$  es la variedad base del fibrado que define el algebroides  $E$ .

Denotaremos por  $\tilde{\tau}: \bigoplus^k E \rightarrow Q$  la proyección canónica definida por

$$\tilde{\tau}(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) = \mathbf{q}.$$

A continuación vamos a describir un sistema local de coordenadas en  $\bigoplus^k E$ .

Sea  $(q^i, y^\alpha)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m}$  un sistema de coordenadas locales en un abierto  $\tau^{-1}(U)$  de  $E$ , siendo  $(q^i)_{1 \leq i \leq n}$  las coordenadas en un abierto  $U$  de la variedad base  $Q$ . Definimos el sistema de coordenadas locales

$$(q^i, y_A^\alpha)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq A \leq k}$$

en  $\tilde{\tau}^{-1}(U) \subset \bigoplus^k E$  como sigue:

$$q^i(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) = q^i(\mathbf{q}), \quad y_A^\alpha(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) = y^\alpha(a_{A\mathbf{q}}), \quad (5.21)$$

donde  $(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) \in \bigoplus^k E$ .

Estas coordenadas dotan a  $\bigoplus^k E$  de una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $n + km$ .

B. La prolongación de un algebroides de Lie mediante la proyección  $\tilde{\tau}: \bigoplus^k E \rightarrow Q$ .

A continuación consideramos la prolongación  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E)$  de  $E$  mediante la fibración  $\tilde{\tau}: \bigoplus^k E \rightarrow Q$ , es decir, (véase la Sección 5.2),

$$\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) = \{(a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) \in E \times T(\bigoplus^k E) / \rho(a_{\mathbf{q}}) = T\tilde{\tau}(v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}})\}. \quad (5.22)$$

Teniendo en cuenta los contenidos de la Sección 5.2, y considerando el caso particular  $P = E \oplus \dots \oplus E$  obtenemos:

(1)  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E)$  es un algebroides de Lie sobre  $\bigoplus^k E$  con proyección

$$\tilde{\tau}_{\bigoplus^k E}: \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E) \longrightarrow \bigoplus^k E$$

y estructura de algebroides de Lie  $([\![\cdot, \cdot]\!], \tilde{\tau}, \rho^{\tilde{\tau}})$  donde el ancla

$$\rho^{\tilde{\tau}}: E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E) \equiv \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \rightarrow T(\bigoplus^k E)$$

es la proyección sobre el segundo factor.

(2) Si  $(q^i, y_A^\alpha)$  denota un sistema local de coordenadas de  $\bigoplus^k E$  entonces el sistema de coordenadas locales inducido en  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E)$  es

$$(q^i, y_A^\alpha, z^\alpha, w_A^\alpha)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k, 1 \leq \alpha \leq m}$$

donde, véase (5.15),

$$\begin{aligned} q^i(a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) &= q^i(\mathbf{q}), & y_A^\alpha(a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) &= y_A^\alpha(\mathbf{b}_{\mathbf{q}}), \\ z^\alpha(a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) &= y^\alpha(a_{\mathbf{q}}), & w_A^\alpha(a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) &= v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}(y_A^\alpha). \end{aligned} \quad (5.23)$$

(3) De (5.16) obtenemos que el conjunto  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}$  definido por

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_\alpha: \quad \bigoplus^k E &\rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E) \\ \mathbf{b}_\mathbf{q} &\mapsto \mathcal{X}_\alpha(\mathbf{b}_\mathbf{q}) = (e_\alpha(\mathbf{q}); \rho_\alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{b}_\mathbf{q}}) \\ \mathcal{V}_\alpha^A: \quad \bigoplus^k E &\rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E) \\ \mathbf{b}_\mathbf{q} &\mapsto \mathcal{V}_\alpha^A(\mathbf{b}_\mathbf{q}) = (0_\mathbf{q}; \frac{\partial}{\partial y_A^\alpha} \Big|_{\mathbf{b}_\mathbf{q}}),\end{aligned}\tag{5.24}$$

es una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_k: \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$ .

A partir de ahora denotaremos por  $\text{Sec}(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E))$  el conjunto de secciones de  $\tilde{\tau}_k: \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$ .

(4) A cada sección  $\xi: \bigoplus^k E \rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E)$  de  $\tilde{\tau}_k$  le asociamos un campo de vectores por medio del ancla del algebroid  $\rho^{\tilde{\tau}}: \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \rightarrow T(\bigoplus^k E)$ . Si  $\xi$  se escribe localmente como sigue:

$$\xi = \xi^\alpha \mathcal{X}_\alpha + \xi_A^\alpha \mathcal{V}_\alpha^A \in \text{Sec}(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E))$$

entonces, reescribiendo la expresión (5.17) para este caso particular obtenemos,

$$\rho^{\tilde{\tau}}(\xi) = \rho_\alpha^i \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi_A^\alpha \frac{\partial}{\partial y_A^\alpha} \in \mathfrak{X}(\bigoplus^k E).\tag{5.25}$$

(5) El corchete de Lie de secciones de  $\tilde{\tau}_k$  queda determinado a partir del corchete de los elementos de una base de secciones, véase (5.19),

$$[\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta]^{\tilde{\tau}} = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}_\gamma \quad [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta^B]^{\tilde{\tau}} = 0 \quad [\mathcal{V}_\alpha^A, \mathcal{V}_\beta^B]^{\tilde{\tau}} = 0,\tag{5.26}$$

(6) Si  $\{\mathcal{X}^\alpha, \mathcal{V}_A^\alpha\}$  es la base dual de  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}$ , de las expresiones (5.20) que caracterizan la diferencial exterior en el algebroid prolongación obtenemos que

$$\begin{aligned}d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)} f &= \rho_\alpha^i \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathcal{X}^\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_A^\alpha} \mathcal{V}_A^\alpha, \quad \text{para } f \in \mathcal{C}^\infty(\bigoplus^k E) \\ d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)} \mathcal{X}^\gamma &= -\frac{1}{2} \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{X}^\beta, \quad d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)} \mathcal{V}_A^\gamma = 0.\end{aligned}\tag{5.27}$$

**Observación 5.11** En el caso particular  $E = TQ$  la variedad  $\mathcal{T}^E(\overset{k}{\oplus} E)$  se identifica con  $T(T_k^1 Q)$ .

En efecto, puesto que  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  en este caso consideramos la prolongación de  $TQ$  sobre  $\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$ . Así de (5.22) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}^{TQ}(\overset{k}{\oplus} TQ) &= \mathcal{T}^{TQ}(T_k^1 Q) \\
 &= \{(u_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{w}_{\mathbf{q}}}) \in TQ \times T(T_k^1 Q) / u_{\mathbf{q}} = T(\tau_Q^k)(v_{\mathbf{w}_{\mathbf{q}}})\} \\
 &= \{(T(\tau_Q^k)(v_{\mathbf{w}_{\mathbf{q}}}), v_{\mathbf{w}_{\mathbf{q}}}) \in TQ \times T(T_k^1 Q) / w_{\mathbf{q}} \in T_k^1 Q\} \\
 &\equiv \{v_{\mathbf{w}_{\mathbf{q}}} \in T(T_k^1 Q) / w_{\mathbf{q}} \in T_k^1 Q\} \equiv T(T_k^1 Q)
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

◇

Sobre  $\mathcal{T}^E(\overset{k}{\oplus} E)$  vamos a definir dos familias de objetos canónicos denominados *secciones de Liouville* y *endomorfismos verticales* que se corresponden con *campos de Liouville* y la *estructura  $k$ -tangente* en  $T_k^1 Q$ . En los siguientes apartados vamos a definir estos objetos.

C. Levantamiento vertical  $A$ -ésimo.

**Definición 5.12** (véase por ejemplo [24]) Un elemento  $(a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}})$  de  $\mathcal{T}^E(\overset{k}{\oplus} E) \equiv E \times_{TQ} T(\overset{k}{\oplus} E)$  se dice **vertical** si verifica

$$\tilde{\tau}_1(a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) = 0_{\mathbf{q}} \in E,$$

donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{\tau}_1 : \mathcal{T}^E(\overset{k}{\oplus} E) \equiv E \times_{TQ} T(\overset{k}{\oplus} E) &\rightarrow E, \\
 (a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) &\mapsto \tilde{\tau}_1(a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) = a_{\mathbf{q}}
 \end{aligned}$$

es la proyección sobre el primer factor  $E$  de  $\mathcal{T}^E(\overset{k}{\oplus} E)$ .

La definición anterior implica que los elementos verticales de  $\mathcal{T}^E(\overset{k}{\oplus} E)$  son de la forma

$$(0_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) \in \mathcal{T}^E(\overset{k}{\oplus} E) \equiv E \times_{TQ} T(\overset{k}{\oplus} E)$$

donde  $v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}} \in T(\overset{k}{\oplus} E)$  y  $\mathbf{b}_{\mathbf{q}} \in \overset{k}{\oplus} E$ .

Ahora bien, teniendo en cuenta la definición (5.22), que determina los elementos de  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$ , la condición que de un elemento sea vertical significa que

$$0 = T_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}} \tilde{\tau}(v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) ,$$

es decir el vector  $v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}$  es vertical respecto a la proyección  $\tilde{\tau}: \bigoplus^k E \rightarrow Q$ .

Por lo tanto, si consideramos un sistema de coordenadas locales adaptadas  $(q^i, y_A^\alpha)$  en  $\bigoplus^k E$  entonces se verifica que:

$$v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}} = u_A^\alpha \frac{\partial}{\partial y_A^\alpha} \Big|_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}} \in T_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}(\bigoplus^k E) .$$

**Definición 5.13** Para cada  $A = 1, \dots, k$  consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \xi^{V_A} : E \times_Q (\bigoplus^k E) &\longrightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E) \\ (a_{\mathbf{q}}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) &\longmapsto \xi^{V_A}(a_{\mathbf{q}}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = \left(0_{\mathbf{q}}, (a_{\mathbf{q}})_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}^{V_A}\right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde  $a_{\mathbf{q}} \in E$ ,  $\mathbf{b}_{\mathbf{q}} = (b_{1\mathbf{q}}, \dots, b_{k\mathbf{q}}) \in \bigoplus^k E$  y el vector  $(a_{\mathbf{q}})_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}^{V_A} \in T_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}(\bigoplus^k E)$  está definido por

$$(a_{\mathbf{q}})_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}^{V_A} f = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f(b_{1\mathbf{q}}, \dots, b_{A\mathbf{q}} + s a_{\mathbf{q}}, \dots, b_{k\mathbf{q}}) , \quad 1 \leq A \leq k , \quad (5.30)$$

para una función arbitraria  $f \in \mathcal{C}^\infty(\bigoplus^k E)$ .

Denominamos a la aplicación  $\xi^{V_A}$  la aplicación **levantamiento vertical A-ésimo**.

De (5.30) deducimos que la expresión local de  $(a_{\mathbf{q}})_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}^{V_A}$  es

$$(a_{\mathbf{q}})_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}^{V_A} = y^\alpha(a_{\mathbf{q}}) \frac{\partial}{\partial y_A^\alpha} \Big|_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}} \in T_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}(\bigoplus^k E) , \quad 1 \leq A \leq k \quad (5.31)$$

siendo  $(q^i, y^\alpha)$  un sistema local de coordenadas en  $E$  y  $(q^i, y_A^\alpha)$  el inducido en  $\bigoplus^k E$ .

En (5.31) se observa que el vector  $(a_{\mathbf{q}})_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}^{V_A} \in T_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}(\bigoplus^k E)$  es vertical respecto a la aplicación  $\tilde{\tau}: \bigoplus^k E \rightarrow Q$ . Esto nos garantiza que  $\xi^{V_A}(a_{\mathbf{q}}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})$  es un elemento vertical de  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$ .

De las expresiones (5.24), (5.29) y (5.31) obtenemos que  $\xi^{V_A}$  se escribe en función de la base local

$$\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta^B\}$$

de secciones del fibrado vectorial  $\tilde{\tau}_k : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$  como sigue:

$$\xi^{V_A}(a_{\mathbf{q}}, b_{\mathbf{q}}) = (0_{\mathbf{q}}, y^\alpha(a_{\mathbf{q}}) \frac{\partial}{\partial y_A^\alpha} \Big|_{b_{\mathbf{q}}}) = y^\alpha(a_{\mathbf{q}}) \mathcal{V}_\alpha^A(b_{\mathbf{q}}), \quad 1 \leq A \leq k. \quad (5.32)$$

### Observación 5.14

- (1) En el caso estándar, es decir, cuando  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$ , dados dos elementos  $u_{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}Q$  y  $\mathbf{v}_{\mathbf{q}} = (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) \in T_k^1Q$  se obtiene

$$(u_{\mathbf{q}})_{\mathbf{v}_{\mathbf{q}}}^{V_A} = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f(v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{A\mathbf{q}} + su_{\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}), \quad 1 \leq A \leq k,$$

que coincide con la definición de levantamiento vertical  $A$ -ésimo del vector  $u_{\mathbf{q}}$  tangente a  $Q$ , a un vector tangente a  $T_k^1Q$ , (véase por ejemplo [56, 107, 119] y el apartado C de la sección 1.2.1 de esta memoria).

- (2) Si reescribimos este apartado en el caso particular  $k = 1$  obtenemos que  $\xi^{V_1} \equiv \xi^V : E \times_Q E \rightarrow \mathcal{T}^E E$  es la aplicación levantamiento vertical introducida por E. Martínez en [96, 98].

◇

### D. Endomorfismo verticales en $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$ .

En el fibrado tangente de las  $k^1$ -velocidades,  $T_k^1Q$ , hemos definido, en la sección 1.2.4, la estructura  $k$ -tangente canónica  $J^1 \dots, J^k$ . Esta familia de tensores de tipo  $(1, 1)$  se emplea en el desarrollo de la formulación lagrangiana  $k$ -simpléctica de las teorías clásicas de campos de primer orden.

En este apartado vamos a introducir el objeto análogo en el contexto de los algebroides de Lie.

**Definición 5.15** Para cada  $A = 1, \dots, k$  se define el **endomorfismo vertical A-ésimo** en  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E)$  como la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{J}^A : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) &\rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \\ (a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) &\mapsto \tilde{J}^A(a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) = \xi^{V_A}(a_{\mathbf{q}}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}), \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde  $a_{\mathbf{q}} \in E$ ,  $\mathbf{b}_{\mathbf{q}} = (b_{1\mathbf{q}}, \dots, b_{k\mathbf{q}}) \in \bigoplus^k E$  y  $v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}} \in T_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}(\bigoplus^k E)$ .

**Lema 5.16** Consideremos

$$\{\mathcal{X}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\alpha}^A\}_{1 \leq A \leq k, 1 \leq \alpha \leq m}$$

una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E}^k : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$  y sea

$$\{\mathcal{X}^{\alpha}, \mathcal{V}_A^{\alpha}\}_{1 \leq A \leq k, 1 \leq \alpha \leq m}$$

la base dual asociada.

En estas bases, la expresión local de  $\tilde{J}^A$  es:

$$\tilde{J}^A = \sum_{\alpha=1}^m \mathcal{V}_{\alpha}^A \otimes \mathcal{X}^{\alpha}, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (5.34)$$

*Demostración:*

La expresión local (5.34) de  $\tilde{J}^A$  es consecuencia de las expresiones (5.24) y (5.32). En efecto, teniendo en cuenta estas expresiones obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{J}^A(\mathcal{X}_{\alpha}(\mathbf{b}_{\mathbf{q}})) &= \xi^{V_A}(e_{\alpha}(\mathbf{q}), \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = y^{\beta}(e_{\alpha}(\mathbf{q})) \mathcal{V}_{\beta}^A(\mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = \mathcal{V}_{\alpha}^A(\mathbf{b}_{\mathbf{q}}), \\ \tilde{J}^A(\mathcal{V}_{\alpha}^B(\mathbf{b}_{\mathbf{q}})) &= \xi^{V_A}(0_{\mathbf{q}}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = y_A^{\alpha}(0_{\mathbf{q}}) \mathcal{V}_{\alpha}^A(\mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = 0, \end{aligned}$$

para cada  $\mathbf{b}_{\mathbf{q}} \in \bigoplus^k E$  y cada  $A, B = 1, \dots, k$ ,  $\alpha = 1 \dots, m$ .

□

**Observación 5.17**

- (1) Reescribiendo la definición de  $\tilde{J}^1, \dots, \tilde{J}^k$  en el caso particular  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  obtenemos la estructura  $k$ -tangente  $J^1, \dots, J^k$  en  $T_k^1 Q$ .

En efecto, como ya hemos visto en la Observación 5.11, en este caso  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$  se identifica con  $T(T_k^1 Q)$ . Entonces cada aplicación

$$\tilde{J}^A: T(T_k^1 Q) \equiv \mathcal{T}^{TQ}(T_k^1 Q) \rightarrow T(T_k^1 Q) \equiv \mathcal{T}^{TQ}(T_k^1 Q)$$

se define como sigue:

$$\begin{aligned} \tilde{J}^A(v_{w_q}) &= \tilde{J}^A(T_{w_q}(\tau_Q^k)(v_{w_q}), v_{w_q}) = \xi^{V_A}(T_{w_q}(\tau_Q^k)(v_{w_q}), w_q) \\ &\equiv (0_q, (T_{w_q}(\tau_Q^k)(v_{w_q}))_{w_q}^{V_A}) \equiv (T_{w_q}(\tau_Q^k)(v_{w_q}))_{w_q}^{V_A} = J^A(v_{w_q}), \end{aligned}$$

en donde en la primera y en la penúltima igualdad hemos utilizado la identidad entre los elementos de  $T(T_k^1 Q)$  y  $\mathcal{T}^{TQ}(T_k^1 Q)$  que hemos demostrado en la observación 5.11 y la última igualdad es consecuencia de la definición de  $J^A$ , véase (1.24).

- (2) En el caso particular  $k = 1$  obtenemos el endomorfismo vertical  $S$  en  $\mathcal{T}^E(TQ)$ , esto es, en la prolongación del algebroide  $E$  sobre  $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$ , que fue definido por E. Martínez en [96].

◇

**E. Las secciones de Liouville.**

En este apartado vamos a introducir la segunda familia de elementos geométricos canónicos que consideraremos en la prolongación  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$ .

**Definición 5.18** *La sección de Liouville  $A$ -ésima en  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$  es la sección  $\tilde{\Delta}_A$  de  $\tilde{\tau}_{\bigoplus^k E} : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$  definida como sigue*

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_A : \bigoplus^k E &\rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E) \\ b_q &\mapsto \tilde{\Delta}_A(b_q) = \xi^{V_A}(pr_A(b_q), b_q) = \xi^{V_A}(b_{Aq}, b_q) \end{aligned}, \quad 1 \leq A \leq k,$$



donde  $b_{\mathbf{q}} = (b_{1\mathbf{q}}, \dots, b_{k\mathbf{q}}) \in \bigoplus^k E$  y  $pr_A : \bigoplus^k E \rightarrow E$  es la proyección sobre la  $A$ -ésima copia de  $E$  en  $\bigoplus^k E$ .

De la expresión local (5.32) de  $\xi^{V_A}$  y teniendo en cuenta que

$$y^\alpha(b_{A\mathbf{q}}) = y_A^\alpha(b_{1\mathbf{q}}, \dots, b_{k\mathbf{q}}) = y_A^\alpha(b_{\mathbf{q}})$$

se obtiene que la sección  $\tilde{\Delta}_A$  tiene la siguiente expresión local

$$\tilde{\Delta}_A = \sum_{\alpha=1}^m y_A^\alpha \mathcal{V}_\alpha^A, \quad 1 \leq A \leq k, \quad (5.35)$$

en la base local de secciones de  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E}^k$  dada por  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}$  y que definimos en (5.24).

**Observación 5.19** En el caso estándar, esto es, cuando  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  se verifica que cada sección  $\tilde{\Delta}_A$  se identifica con el campo de vectores

$$\begin{aligned} \Delta_A: \quad T_k^1 Q &\rightarrow T(T_k^1 Q) \\ v_{\mathbf{q}} = (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{A\mathbf{q}}) &\mapsto (v_{A\mathbf{q}})_{v_{\mathbf{q}}}^{V_A} \end{aligned}$$

esto es (véase definición 1.31 y observación 1.32), con el  $A$ -ésimo campo de vectores de Liouville o campo de vectores canónico en  $T_k^1 Q$ .

◇

En el formalismo lagrangiano  $k$ -simpléctico estándar los campos de vectores canónicos  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ , son utilizados para definir la función energía lagrangiana.

De modo análogo, en el contexto que nos proporcionan los algebroides de Lie sucede algo similar ya que, como veremos en la sección 5.3.3, definiremos la función energía lagrangiana a partir de las secciones de Liouville  $\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_k$ .

### 5.3.2. Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

En el formalismo lagrangiano  $k$ -simpléctico estándar las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene como secciones integrales de ciertas ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden (SOPDE) en  $T_k^1 Q$ .

Con la finalidad de introducir el concepto de SOPDE en algebroides de Lie vamos a recordar el concepto de SOPDE en  $T_k^1 Q$ , (para más detalles véase la sección 1.2.3.)

Un SOPDE en  $T_k^1 Q$  es una sección de las aplicaciones

$$\begin{aligned} \tau_{T_k^1 Q}^k: \quad T_k^1(T_k^1 Q) &\rightarrow T_k^1 Q \\ (v_{1w_q}, \dots, v_{kw_q}) &\mapsto w_q \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T_k^1(\tau_Q^k): \quad T_k^1(T_k^1 Q) &\rightarrow T_k^1 Q \\ (v_{1w_q}, \dots, v_{kw_q}) &\mapsto (T_{w_q}(\tau_Q^k)(v_{1w_q}), \dots, T_{w_q}(\tau_Q^k)(v_{kw_q})) \end{aligned} ,$$

donde  $\tau_Q^k: T_k^1 Q \rightarrow Q$  denota la proyección canónica del fibrado de las  $k^1$ -velocidades.

Volviendo al contexto de algebroides de Lie, tenemos que definir dos aplicaciones que se correspondan con las dos anteriores del caso estándar. Sabemos que:

- $\bigoplus^k E$  juega el papel de  $T_k^1 Q$ ,
- $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$  el de  $T(T_k^1 Q)$  y
- $T_k^1(T_k^1 Q)$  es la suma de Whitney de  $k$  copias de  $T(T_k^1 Q)$ .

Entonces es natural pensar que la suma de Whitney de  $k$  copias de  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$ , esto es,

$$\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$$

jugará el papel de

$$T_k^1(T_k^1 Q) = T(T_k^1 Q) \oplus \dots \oplus T(T_k^1 Q) .$$

La pregunta que surge ahora de modo natural es: *¿qué aplicaciones se corresponden, en el contexto de los algebroides de Lie, con  $\tau_{T_k^1 Q}^k$  y  $T_k^1(\tau_Q^k)$ ?*

A lo largo de los siguientes apartados daremos la respuesta a esta pregunta.

A. La  $k$ -prolongación de  $E$  sobre  $\tilde{\tau}: \bigoplus^k E \rightarrow Q$ .

Sea  $E$  un algebroide de Lie sobre una variedad diferenciable  $Q$  de dimensión  $n$  y  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E}^k: \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$  la prolongación de  $E$  mediante  $\tilde{\tau}: \bigoplus^k E \rightarrow Q$ .

Denotaremos por  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$  la suma de Whitney de  $k$  copias de la prolongación  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E)$ , esto es,

$$(\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E) = \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E).$$

Así los elementos de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$  son de la forma

$$((a_{1\mathbf{q}}, v_{1\mathbf{b}_\mathbf{q}}), \dots, (a_{k\mathbf{q}}, v_{k\mathbf{b}_\mathbf{q}}))$$

donde cada  $(a_{A\mathbf{q}}, v_{Ab_\mathbf{q}})$  pertenece a la fibra  $(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E))_{\mathbf{b}_\mathbf{q}} = E_{\mathbf{q}} \times_{TQ} (T_{\mathbf{b}_\mathbf{q}}(\bigoplus^k E)) = (\tilde{\tau}_k^1)^{-1}(\mathbf{b}_\mathbf{q})$ .

Denotaremos por  $\tilde{\tau}_k^1 : (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$  la proyección canónica dada por:

$$\tilde{\tau}_k^1((a_{1\mathbf{q}}, v_{1\mathbf{b}_\mathbf{q}}), \dots, (a_{k\mathbf{q}}, v_{k\mathbf{b}_\mathbf{q}})) = \mathbf{b}_\mathbf{q}.$$

Denominamos  **$k$ -prolongación de  $E$  sobre  $\tilde{\tau} : \bigoplus^k E \rightarrow Q$**  al fibrado  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$ .

A partir de la aplicación  $\tilde{\tau}_1 : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) = E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E) \rightarrow E$ , esto es la proyección sobre el primer factor, podemos definir la proyección

$$\tilde{\tau}_1^k := \tilde{\tau}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\tau}_1 : (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$$

como sigue

$$\tilde{\tau}_1^k((a_{1\mathbf{q}}, v_{1\mathbf{b}_\mathbf{q}}), \dots, (a_{k\mathbf{q}}, v_{k\mathbf{b}_\mathbf{q}})) = (a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}).$$

**Observación 5.20** Consideremos ahora el caso particular  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  donde recordemos que  $\rho : E \rightarrow TQ$  denota el ancla del algebroid de lie  $E$ .

Teniendo en cuenta la observación 5.11, el la que se estableció el difeomorfismo

$$\begin{aligned} T(T_k^1 Q) &\equiv \mathcal{T}^{TQ}(T_k^1 Q) = (TQ) \times_{TQ} T(T_k^1 Q) \\ v_{\mathbf{w}_\mathbf{q}} &\equiv (T(\tau_Q^k)(v_{\mathbf{w}_\mathbf{q}}), v_{\mathbf{w}_\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

se deduce:

- La aplicación

$$\tilde{\tau}_{\oplus TQ}^k : (\mathcal{T}^{TQ})_k^1(T_k^1 Q) \equiv T_k^1(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q$$

se corresponde con  $\tau_{T_k^1 Q}^k : T_k^1(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q$  ya que

$$\begin{aligned} & \tilde{\tau}_{T_k^1 Q}^k((T(\tau_Q^k)(v_{1\mathbf{w}_Q}), v_{1\mathbf{w}_Q}), \dots, (T(\tau_Q^k)(v_{k\mathbf{w}_Q}), v_{k\mathbf{w}_Q})) = \mathbf{w}_Q \\ &= \tau_{T_k^1 Q}^k(v_{1\mathbf{w}_Q}, \dots, v_{k\mathbf{w}_Q}). \end{aligned}$$

- La aplicación

$$\tilde{\tau}_1^k : (\mathcal{T}^{TQ})_k^1(T_k^1 Q) \equiv T_k^1(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q$$

se identifica con  $T_k^1(\tau_Q^k) : T_k^1(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q$  ya que

$$\begin{aligned} & \tilde{\tau}_1^k((T(\tau_Q^k)(v_{1\mathbf{w}_Q}), v_{1\mathbf{w}_Q}), \dots, (T(\tau_Q^k)(v_{k\mathbf{w}_Q}), v_{k\mathbf{w}_Q})) \\ &= (T(\tau_Q^k)(v_{1\mathbf{w}_Q}), \dots, T(\tau_Q^k)(v_{k\mathbf{w}_Q})) \\ &= T_k^1(\tau_Q^k)(v_{1\mathbf{w}_Q}, \dots, v_{k\mathbf{w}_Q}). \end{aligned}$$

◇

Con la idea de simplificar la notación un elemento

$$((a_{1\mathbf{q}}, v_{1\mathbf{b}_Q}), \dots, (a_{k\mathbf{q}}, v_{k\mathbf{b}_Q}))$$

de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\oplus^k E)$  lo escribiremos como sigue:

$$(\mathbf{a}_Q, \mathbf{v}_{\mathbf{b}_Q})$$

donde  $\mathbf{a}_Q := (a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) \in \oplus^k E$  y  $\mathbf{v}_{\mathbf{b}_Q} := (v_{1\mathbf{b}_Q}, \dots, v_{k\mathbf{b}_Q}) \in T_k^1(\oplus^k E)$ .

B. Secciones de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\oplus^k E)$  y campos de  $k$ -vectores en  $\oplus^k E$ .

En este apartado asociaremos un campo de  $k$ -vectores en  $\oplus^k E$  a cada sección de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\oplus^k E)$ . Esta correspondencia es fundamental para desarrollar la formulación lagrangiana  $k$ -simpléctica en algebroides de Lie.

**Lema 5.21** Sea  $\xi: \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$  una sección de la proyección  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E}^k$ . Entonces  $\xi$  define una familia  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  de secciones de  $\tilde{\tau}_k: \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$ .

*Demostración:*

Teniendo en cuenta que  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$  es, por definición, la suma de Whitney de  $k$  copias del fibrado prolongación  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$ , la familia  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  se obtiene sin más que considerar la proyección sobre cada una de las copias tal como muestra el siguiente diagrama para cada  $A = 1, \dots, k$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E) = \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) & \\
 \nearrow \xi & \downarrow \tilde{\tau}_{\bigoplus E}^{k,A} & \\
 \bigoplus^k E & \xrightarrow{\xi_A} & \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)
 \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{\tau}_{\bigoplus E}^{k,A}: (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E) &\rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \\
 ((a_{1\mathbf{q}}, v_{1\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}), \dots, (a_{k\mathbf{q}}, v_{k\mathbf{b}_{\mathbf{q}}})) &\mapsto (a_{A\mathbf{q}}, v_{A\mathbf{b}_{\mathbf{q}}})
 \end{aligned}$$

denota la proyección canónica sobre la  $A$ -ésima copia de  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$  en  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$ .

□

**Proposición 5.22** Sea  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k): \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$  una sección de  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E}^k$ . Entonces

$$(\rho^{\tilde{\tau}}(\xi_1), \dots, \rho^{\tilde{\tau}}(\xi_k)): \bigoplus^k E \rightarrow T_k^1(\bigoplus^k E)$$

es un campo de  $k$ -vectores en  $\bigoplus^k E$ . Recordemos que la aplicación

$$\rho^{\tilde{\tau}}: \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E) \rightarrow T(\bigoplus^k E)$$

denota el ancla del algebroid  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$ .

*Demostración:*

Es una consecuencia directa de los Lemas 5.7 y 5.21.

□

Los campos de  $k$ -vectores que se obtienen a partir de esta proposición van a jugar un papel fundamental en la descripción del formalismo lagrangiano  $k$ -simpléctico en algebroides de Lie.

Vamos ahora a calcular la expresión local del campo de  $k$ -vectores asociado a una sección  $\xi$ .

Sea  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  una sección de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$ . El Lema 5.21 nos permite afirmar que cada  $\xi_A: \bigoplus^k E \rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$  es una sección de  $\tilde{\tau}_k^E: \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$ .

Sea ahora  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}$  una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_k^E: \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$ . Entonces cada  $\xi_A$  se escribe localmente en esta base como sigue:

$$\xi_A = \xi_A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + (\xi_A)_B^\alpha \mathcal{V}_\alpha^B \in \text{Sec}(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)),$$

para ciertas funciones  $\xi_A^\alpha, (\xi_A)_B^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\bigoplus^k E)$ .

De (5.25) obtenemos que el campo de vectores en  $\bigoplus^k E$  asociado a  $\xi_A$  tiene la siguiente expresión local:

$$\rho^{\tilde{\tau}}(\xi_A) = \rho_\alpha^i \xi_A^\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + (\xi_A)_B^\alpha \frac{\partial}{\partial y_B^\alpha} \in \mathfrak{X}(\bigoplus^k E), \quad 1 \leq A \leq k. \quad (5.36)$$

C. SOPDE's en  $\bigoplus^k E$ .

Como hemos comprobado en la observación 5.20, en la descripción del formalismo lagrangiano en algebroides de Lie, las aplicaciones

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_k^E : (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E) &\rightarrow \bigoplus^k E \\ (a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}}) &\mapsto b_{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_1^k : (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E) &\rightarrow \bigoplus^k E \\ (a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}}) &\mapsto a_{\mathbf{q}} = (a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}})\end{aligned}$$

juegan el papel de  $\tau_{T_k^1 Q}^k$  y  $T_k^1(\tau_Q^k)$  respectivamente, en el caso estándar. Recordemos que estamos empleando la notación

$$(a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}}) := ((a_{1\mathbf{q}}, v_{1b_{\mathbf{q}}}), \dots, (a_{k\mathbf{q}}, v_{kb_{\mathbf{q}}}))$$

Así, el objeto análogo a un SOPDE será una sección de las dos aplicaciones  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E}^k$  y  $\tilde{\tau}_1^k$ .

**Definición 5.23** *Una ecuación en derivadas parciales de segundo orden (SOPDE) en  $\bigoplus^k E$  es una aplicación  $\xi : \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$  que es una sección de las aplicaciones  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E}^k$  y  $\tilde{\tau}_1^k$ .*

La siguiente definición nos permitirá dar una caracterización del concepto de SOPDE.

**Definición 5.24** *El conjunto*

$$\begin{aligned}\text{Adm}(E) &= \{(a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}}) \in (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E) \mid \tilde{\tau}_1^k(a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}}) = \tilde{\tau}_{\bigoplus E}^k(a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}})\} \\ &= \{(a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}}) \in (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E) \mid a_{\mathbf{q}} = b_{\mathbf{q}}\}.\end{aligned}\tag{5.37}$$

es llamado **conjunto de puntos admisibles**.

Obsérvese que un punto admisible es un elemento de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$  de la forma

$$(b_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}}) = ((b_{1\mathbf{q}}, v_{1b_{\mathbf{q}}}), \dots, (b_{k\mathbf{q}}, v_{kb_{\mathbf{q}}})) ,$$

siento  $b_{\mathbf{q}} = (b_{1\mathbf{q}}, \dots, b_{k\mathbf{q}}) \in \bigoplus^k E$ .

**Proposición 5.25** *Sea*

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$$

una sección del fibrado vectorial  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E}^k$ . Las siguientes propiedades son equivalentes:

- (1)  $\xi$  toma valores en  $\text{Adm}(E)$  .
- (2)  $\xi$  es un SOPDE, esto es, verifica  $\tilde{\tau}_1^k \circ \xi = id_{\oplus^k E}$  .
- (3)  $\tilde{J}^A(\xi_A) = \tilde{\Delta}_A$  para todo  $A = 1, \dots, k$ .

*Demostración:*

La equivalencia entre (1) y (2) es una consecuencia directa de la definición del conjunto de puntos admisibles (5.37). La equivalencia entre (1) y (3) es una consecuencia directa de la definición de  $\tilde{J}^A$ ,  $\tilde{\Delta}_A$  y  $\xi^{V_A}$ .

□

Vamos a calcular la expresión local de un SOPDE  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$

Consideremos  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}$  una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_{\oplus^k E}^k : \mathcal{T}^E(\oplus^k E) \rightarrow \oplus^k E$ , entonces cada sección

$$\xi_A : \oplus^k E \rightarrow \mathcal{T}^E(\oplus^k E) = E \times_{TQ} T(\oplus^k E)$$

se escribe en esta base como sigue

$$\xi_A = \xi_A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + (\xi_A)_B^\alpha \mathcal{V}_\alpha^B$$

para ciertas funciones  $\xi_A^\alpha, (\xi_A)_B^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\oplus^k E)$ .

Puesto que  $\xi$  es un SOPDE las secciones  $\xi_1, \dots, \xi_k$  satisfacen las igualdades

$$\tilde{J}^A(\xi_A) = \tilde{\Delta}_A, \quad 1 \leq A \leq k$$

de donde obtenemos que la expresión local de  $\xi_A$  es:

$$\xi_A = y_A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + (\xi_A)_B^\alpha \mathcal{V}_\alpha^B$$

siendo  $(\xi_A)_B^\alpha$  funciones en  $\oplus^k E$ .

Como se observa en la definición de SOPDE, éste es una sección de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\oplus^k E)$  y por tanto, tal como hemos visto en el apartado anterior, podemos definir un campo de  $k$ -vectores en  $\oplus^k E$  asociado al mismo.



De (5.36) obtenemos que el campo de  $k$ -vectores en  $\bigoplus^k E$ ,

$$(\rho^{\tilde{\tau}}(\xi_1), \dots, \rho^{\tilde{\tau}}(\xi_k)),$$

asociado a  $\xi$  por medio del ancla  $\rho^{\tilde{\tau}}: \text{Sec}(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)) \rightarrow \mathfrak{X}(\bigoplus^k E)$ , tiene la siguiente expresión local:

$$\rho^{\tilde{\tau}}(\xi_A) = \rho_{\alpha}^i y_A^{\alpha} \frac{\partial}{\partial q^i} + (\xi_A)_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y_{\beta}^{\alpha}} \in \mathfrak{X}(\bigoplus^k E), \quad 1 \leq A \leq k. \quad (5.38)$$

Por último, sabemos que en el formalismo lagrangiano  $k$ -simpléctico estándar las secciones integrales de ciertos SOPDE's son soluciones de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange.

A continuación vamos a introducir, en el contexto que nos proporcionan los algebroides de Lie, el concepto de sección integral de un SOPDE.

**Definición 5.26** *Una aplicación*

$$\eta: \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E$$

se llama **sección integral** del SOPDE  $\xi$ , si  $\eta$  es una sección integral del campo de  $k$ -vectores  $(\rho^{\tilde{\tau}}(\xi_1), \dots, \rho^{\tilde{\tau}}(\xi_k))$ , asociado a  $\xi$ , esto es,

$$(\rho^{\tilde{\tau}}(\xi_A))(\eta(\mathbf{t})) = \eta_*(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right), \quad 1 \leq A \leq k, \quad (5.39)$$

es decir, para cada  $A = 1, \dots, k$  el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & \bigoplus^k E & \xrightarrow{\xi_A} & \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) & \\ \eta \nearrow & & & & \searrow \rho^{\tilde{\tau}} \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t^A}} & T\mathbb{R}^k & \xrightarrow{\eta_* \equiv T\eta} & T(\bigoplus^k E) \end{array}$$

Si  $\eta: \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E$  se expresa localmente como sigue

$$\eta(\mathbf{t}) = (\eta^i(\mathbf{t}), \eta_A^{\alpha}(\mathbf{t})),$$

entonces, teniendo en cuenta la expresión (5.38) de los campos de vectores asociados a  $\xi_1, \dots, \xi_k$ , deducimos que la condición de ser sección integral (5.39) es equivalente a la familia de identidades,

$$\left. \frac{\partial \eta^i}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} = \eta_A^\alpha(\mathbf{t}) \rho_\alpha^i(\tilde{\tau}(\eta(\mathbf{t}))) , \quad \left. \frac{\partial \eta_B^\beta}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} = (\xi_A)_B^\beta(\eta(\mathbf{t})) , \quad (5.40)$$

donde  $\tilde{\tau}: \bigoplus^k E \rightarrow Q$  es la proyección canónica definida por la relación  $\tilde{\tau}(\mathbf{a}_{\mathbf{q}}) = \mathbf{q}$ .

### 5.3.3. Formalismo lagrangiano.

En esta subsección vamos a describir la formulación lagrangiana  $k$ -simplética en algebroides de Lie.

Con la finalidad de simplificar la notación, a lo largo de esta sección denotaremos por  $d$  la diferencial exterior en el algebroid de Lie  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$ , esto es,

$$d := d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)} .$$

Una función  $L: \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}$  se llamará **función lagrangiana**. En primer lugar vamos a introducir algunos objetos geométricos asociados a una función lagrangiana  $L$ .

#### A. Secciones de Poincaré-Cartan o secciones lagrangianas.

De modo análogo a lo que ocurre en el formalismo  $k$ -simplético estándar, a partir de los endormofismos verticales  $\tilde{J}^1, \dots, \tilde{J}^k$  y dada  $L$  una función lagrangiana se definen las siguientes 1-secciones de  $(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E))^*$

$$\begin{aligned} \Theta_L^A: \bigoplus^k E &\longrightarrow (\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E))^* & 1 \leq A \leq k \\ \mathbf{b}_{\mathbf{q}} &\longmapsto \Theta_L^A(\mathbf{b}_{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

en donde  $\Theta_L^A(\mathbf{b}_{\mathbf{q}})$  es la aplicación

$$\Theta_L^A(\mathbf{b}_{\mathbf{q}}): (\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E))_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}} \equiv E_{\mathbf{q}} \times_{TQ} T_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}(\bigoplus^k E) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por la composición

$$\begin{array}{ccc} & \Theta_L^A(\mathbf{b}_q) & \\ & \curvearrowright & \\ [\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)]_{\mathbf{b}_q} & \xrightarrow{\tilde{J}_{\mathbf{b}_q}^A} & [\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)]_{\mathbf{b}_q} \xrightarrow{(dL)_{\mathbf{b}_q}} \mathbb{R} \end{array}$$

esto es,

$$(\Theta_L^A)(\mathbf{b}_q)(a_q, v_{\mathbf{b}_q}) = (dL)_{\mathbf{b}_q} \left( (\tilde{J}^A)_{\mathbf{b}_q}(a_q, v_{\mathbf{b}_q}) \right), \quad (5.41)$$

siendo  $d = d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)}$  la diferencial exterior de  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$ , véase (5.27).

Estas secciones  $\Theta_L^1, \dots, \Theta_L^k$  se denominan **secciones lagrangianas** o secciones de Poincaré-Cartan.

Utilizando la expresión (5.27) de  $df = d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)} f$  con  $f = L$  se obtiene:

$$(\Theta_L^A)(\mathbf{b}_q)(a_q, v_{\mathbf{b}_q}) = (dL)_{\mathbf{b}_q} \left( (\tilde{J}^A)_{\mathbf{b}_q}(a_q, v_{\mathbf{b}_q}) \right) = \left( \rho^{\tilde{\tau}}((\tilde{J}^A)_{\mathbf{b}_q}(a_q, v_{\mathbf{b}_q})) \right) L, \quad (5.42)$$

donde  $\mathbf{b}_q \in \bigoplus^k E$ ,  $(a_q, v_{\mathbf{b}_q}) \in [\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)]_{\mathbf{b}_q}$  y  $\rho^{\tilde{\tau}}((\tilde{J}^A)_{\mathbf{b}_q}(a_q, v_{\mathbf{b}_q})) \in T_{\mathbf{b}_q}(\bigoplus^k E)$ .

A partir de las 1-secciones  $\Theta_L^1, \dots, \Theta_L^k$  definimos las 2-secciones

$$\Omega_L^A : \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E))^* \wedge (\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E))^*, \quad 1 \leq A \leq k$$

por

$$\Omega_L^A := -d\Theta_L^A, \quad 1 \leq A \leq k.$$

Reescribiendo el apartado (2) de la Definición 5.2 de la diferencial exterior de un algebroide de Lie para el algebroide  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned} \Omega_L^A(\xi_1, \xi_2) &= -d\Theta_L^A(\xi_1, \xi_2) \\ &= [\rho^{\tilde{\tau}}(\xi_2)](\Theta_L^A(\xi_1)) - [\rho^{\tilde{\tau}}(\xi_1)](\Theta_L^A(\xi_2)) + \Theta_L^A([\xi_1, \xi_2]^{\tilde{\tau}}), \end{aligned} \quad (5.43)$$

para todo par  $\xi_1, \xi_2 \in \text{Sec}(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E))$  donde  $(\rho^{\tilde{\tau}}, [\cdot, \cdot]^{\tilde{\tau}})$  denota la estructura de algebroide de Lie de  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$  definida en la Sección 5.3.1.B.

A continuación establecemos las expresiones locales de  $\Theta_L^A$  y  $\Omega_L^A$ .

Consideremos

$$\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^B\}_{1 \leq B \leq k, 1 \leq \alpha \leq m}$$

una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_k : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$  y

$$\{\mathcal{X}^\alpha, \mathcal{V}_B^\alpha\}_{1 \leq B \leq k, 1 \leq \alpha \leq m}$$

su base dual. Entonces de (5.25), (5.34) y (5.42) obtenemos

$$\Theta_L^A = \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha} \mathcal{X}^\alpha, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (5.44)$$

De las expresiones locales (5.24), (5.25), (5.26), (5.43) y (5.44) obtenemos para cada  $A = 1, \dots, k$ ,

$$\Omega_L^A = \frac{1}{2} \left( \rho_\beta^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\alpha} - \rho_\alpha^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\beta} + \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma} \right) \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{X}^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{V}_B^\beta. \quad (5.45)$$

### Observación 5.27

- (1) Si reescribimos las definiciones anteriores en el caso particular  $k = 1$  obtenemos las formas de Poincaré-Cartan de la Mecánica lagrangiana en algebroides de Lie. Véase, por ejemplo, [24, 96].
- (2) Si consideramos el caso particular  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$ , entonces

$$\Omega_L^A(X, Y) = \omega_L^A(X, Y), \quad 1 \leq A \leq k$$

donde  $X, Y$  son campos de vectores en  $T_k^1 Q$  y  $\omega_L^1, \dots, \omega_L^k$  denotan las 2-formas lagrangianas del formalismo  $k$ -simpléctico estándar definidas por  $\omega_L^A = -d(dL \circ J^A)$ , donde  $d$  denota la diferencial usual.

◇

### B. La función energía lagrangiana.

La siguiente definición es la versión en algebroides de Lie de la función energía lagrangiana.

**Definición 5.28** Sea  $L : \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}$  una función lagrangiana. La **función energía**

$$E_L : \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}$$

asociada al lagrangiano  $L$  se define como sigue

$$E_L = \sum_{A=1}^k \rho^{\tilde{\tau}}(\tilde{\Delta}_A) L - L .$$

donde  $\rho^{\tilde{\tau}}(\tilde{\Delta}_A) \in \mathfrak{X}(\bigoplus^k E)$  son los campos de vectores asociados a las secciones de Liouville  $\tilde{\Delta}_A$ .

De (5.25) y (5.35) se deduce que  $E_L$  tiene la siguiente expresión local:

$$E_L = \sum_{A=1}^k y_A^\alpha \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha} - L . \quad (5.46)$$

**Observación 5.29** Si consideramos el caso particular  $E = TQ$  la función  $E_L$  coincide con la función energía del formalismo  $k$ -simpléctico estándar, véase [56, 107, 119] y el capítulo 1 de esta memoria.

Cuando  $k = 1$  obtenemos la definición de la función energía de la Mecánica lagrangiana en algebroides de Lie, véase, por ejemplo, E. Martínez [96].

### C. Morfismos.

En la formulación lagrangiana  $k$ -simpléctica, una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange es un campo

$$\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow Q$$

tal que su primera prolongación

$$\phi^{(1)} : \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$$

verifica las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange, esto es,

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})}, \quad 1 \leq i \leq n .$$

La aplicación  $\phi$  induce de modo natural el morfismo de fibrados vectoriales

$$\Phi = (T\phi, \phi)$$

entre los algebroides de Lie  $T\mathbb{R}^k$  y  $TQ$ ,

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}^k & \xrightarrow{T\phi} & TQ \\ \tau_{\mathbb{R}^k} \downarrow & & \downarrow \tau_Q \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\phi} & Q \end{array}$$

Además se verifica

$$d(\Phi^* \mu) = \Phi^*(d\mu)$$

para toda  $l$ -forma  $\mu$  en  $Q$ , entonces  $\Phi = (T\phi, \phi)$  es un morfismo de algebroides de Lie, (véase la sección 5.1.4 para recordar la definición de morfismo de algebroides de Lie).

A continuación vamos a recordar la definición de la primera prolongación de  $\phi$ . Consideremos la base canónica de secciones de  $\tau_{\mathbb{R}^k}$ ,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^k} \right\}.$$

Recordemos que la primera prolongación  $\phi^{(1)}$  de  $\phi$ , se escribe del siguiente modo:

$$\phi^{(1)}(\mathbf{t}) = (T_{\mathbf{t}}\phi(\frac{\partial}{\partial t^1}|_{\mathbf{t}}), \dots, T_{\mathbf{t}}\phi(\frac{\partial}{\partial t^k}|_{\mathbf{t}})).$$

Lo que acabamos de hacer es describir las soluciones de las ecuaciones de campo Euler-Lagrange, en el caso estándar, desde un nuevo punto de vista que nos permite pensar una solución como un morfismo de algebroides de Lie.

Volviendo al caso de algebroides, para definir el objeto análogo a la primera prolongación de una solución, y teniendo en cuenta el punto de vista anterior, vamos a considerar un morfismo de algebroides de Lie  $\Phi = (\bar{\Phi}, \underline{\Phi})$

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}^k & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & E \\ \tau_{\mathbb{R}^k} \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\underline{\Phi}} & Q \end{array}$$

Considerando

$$\{e_A\}_{1 \leq A \leq k}$$

una base local de secciones de  $\tau_{\mathbb{R}^k}$ , podemos definir una aplicación

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E$$

asociada a  $\Phi$  y dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \mathbb{R}^k &\rightarrow \bigoplus^k E \equiv E \oplus \dots \oplus E \\ \mathbf{t} &\rightarrow (\bar{\Phi}(e_1(\mathbf{t})), \dots, \bar{\Phi}(e_k(\mathbf{t}))) . \end{aligned}$$

**Observación 5.30** En el caso particular  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  se verifica:  $\Phi = (T\phi, \phi)$ ,  $e_A = \partial/\partial t^A$  la aplicación  $\tilde{\Phi}$  se corresponde con la primera prolongación de la  $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow Q$ , esto es,

$$\tilde{\Phi} = \phi^{(1)} .$$

**Observación 5.31** Denotaremos por  $\Phi : T\mathbb{R}^k \rightarrow E$  un morfismo de algebroides de Lie  $\Phi = (\bar{\Phi}, \underline{\Phi})$  entre  $\tau_{\mathbb{R}^k} : T\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  y  $\tau : E \rightarrow Q$ .

◇

Ahora vamos a escribir las expresiones locales del morfismo de algebroides de Lie y su aplicación asociada.

Sean

$$(t^A)_{1 \leq A \leq k} \quad \text{y} \quad (q^i)_{1 \leq i \leq n}$$

dos sistemas locales de coordenadas en  $\mathbb{R}^k$  y  $Q$ , respectivamente. Sea

$$\{e_A\}_{1 \leq A \leq k}$$

una base local de secciones de  $\tau_{\mathbb{R}^k} : T\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  y

$$\{e_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq m}$$

una base local de secciones de  $\tau : E \rightarrow Q$ . Además denotamos por

$$\{e^A\}_{1 \leq A \leq k} \quad \text{y} \quad \{e^\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq m}$$

las bases duales correspondientes. Entonces el morfismo  $\Phi$  está determinado por las relaciones

$$\Phi(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t})) \quad \text{y} \quad \Phi^* e^\alpha = \phi_A^\alpha e^A$$

para ciertas funciones locales  $\phi^i$  y  $\phi_A^\alpha$  en  $\mathbb{R}^k$ .

Así, la aplicación asociada  $\tilde{\Phi}$  tiene la siguiente expresión local

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t}), \phi_A^\alpha(\mathbf{t})).$$

En este caso, las condiciones de morfismo de Lie (5.7) y (5.8) se escriben como sigue

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} = \rho_\alpha^i \phi_A^\alpha \quad \text{y} \quad 0 = \frac{\partial \phi_A^\alpha}{\partial t^B} - \frac{\partial \phi_B^\alpha}{\partial t^A} + \mathcal{C}_{\beta\gamma}^\alpha \phi_B^\beta \phi_A^\gamma, \quad (5.47)$$

donde  $\rho_\alpha^i$  y  $\mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma$  son las funciones de estructura del algebroides de Lie  $E$ .

**Observación 5.32** En el caso estándar, esto es, cuando  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  las condiciones de morfismo anteriores se reducen a

$$\phi_A^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi_A^i}{\partial t^B} = \frac{\partial \phi_B^i}{\partial t^A},$$

de modo que la segunda de estas identidades se puede escribir como sigue:

$$\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial t^B \partial t^A} = \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial t^A \partial t^B}.$$

Así, en el formalismo  $k$ -simplético estándar, considerar morfismos de algebroides de Lie y las aplicaciones asociadas es equivalente a considerar campos  $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  y la primera prolongación  $\phi^{(1)}$  de los mismos.

#### D. Las ecuaciones de Euler-Lagrange.

En este apartado vamos a describir la formulación lagrangiana  $k$ -simplética en términos de algebroides de Lie, generalizando la descripción de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la Mecánica lagrangiana en algebroides de Lie, véase los trabajos de E. Martínez, por ejemplo [24, 96] y la formulación lagrangiana  $k$ -simplética estándar que hemos descrito en el capítulo 1.

A continuación veremos qué nos dice la ecuación geométrica de Euler-Lagrange (1.45) en el caso de algebroides de Lie pero antes veamos como definir un elemento de  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$  a partir de un morfismo de algebroides de Lie  $\Phi = (\bar{\Phi}, \Phi)$ .



**Lema 5.33** Sea  $\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E$  la aplicación asociada a un morfismo de algebroides de Lie  $\Phi = (\tilde{\Phi}, \underline{\Phi}): T\mathbb{R}^k \rightarrow E$ . Entonces

$$(\tilde{\Phi}(\mathbf{t}), \tilde{\Phi}^{(1)}(\mathbf{t})) \in (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E) = \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E),$$

o equivalentemente para cada  $A = 1, \dots, k$

$$\tilde{\tau}_{\bigoplus E}^{k,A}(\tilde{\Phi}(\mathbf{t}), \tilde{\Phi}^{(1)}(\mathbf{t})) \in \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) = E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E),$$

donde  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E}^{k,A}$  la proyección canónica sobre la  $A$ -ésima copia de  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$  en  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$  dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{\bigoplus E}^{k,A}: (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E) = \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) &\rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \\ ((a_{1\mathbf{q}}, v_{1\mathbf{b}_\mathbf{q}}), \dots, (a_{k\mathbf{q}}, v_{k\mathbf{b}_\mathbf{q}})) &\mapsto (a_{A\mathbf{q}}, v_{A\mathbf{b}_\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

*Demostración:*

Vamos a comprobar que para cada  $A = 1, \dots, k$  se tiene

$$\tilde{\tau}_{\bigoplus E}^{k,A}(\tilde{\Phi}(\mathbf{t}), \tilde{\Phi}^{(1)}(\mathbf{t})) \in [\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)]_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} = E_{\tilde{\tau}(\tilde{\Phi}(\mathbf{t}))} \times_{TQ} T_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})}(\bigoplus^k E),$$

donde  $\tilde{\tau}: \bigoplus^k E \rightarrow Q$  es la proyección dada por  $\tilde{\tau}(\mathbf{b}_\mathbf{q}) = \mathbf{q}$ .

Podemos escribir

$$\tilde{\tau}_{\bigoplus E}^{k,A}(\tilde{\Phi}(\mathbf{t}), \tilde{\Phi}^{(1)}(\mathbf{t})) = (pr_A(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})), \tilde{\Phi}_*(\mathbf{t})(\frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}})),$$

donde  $pr_A: \bigoplus^k E \rightarrow E$  es la proyección canónica sobre la  $A$ -ésima copia de  $E$ .

Consideremos un sistema local de coordenadas tal que

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t}), \phi_B^\alpha(\mathbf{t}))$$

entonces

$$\tilde{\Phi}_*(\mathbf{t})(\frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}) = (\phi^i(\mathbf{t}), \phi_B^\alpha(\mathbf{t}), \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, \frac{\partial \phi_B^\alpha}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}), \quad 1 \leq A \leq k.$$

A partir de estas dos expresiones locales obtenemos:

$$\tilde{\tau}_{\oplus E}^{k,A}(\tilde{\Phi}(\mathbf{t}), \tilde{\Phi}^{(1)}(\mathbf{t})) = (\phi^i(\mathbf{t}), \phi_A^\alpha(\mathbf{t}), \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, \frac{\partial \phi_B^\alpha}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}), \quad 1 \leq A \leq k.$$

De la definición (5.22) de  $\mathcal{T}^E(\oplus^k E)$  sabemos que

$$\tilde{\tau}_{\oplus E}^{k,A}(\tilde{\Phi}(\mathbf{t}), \tilde{\Phi}^{(1)}(\mathbf{t})) = (pr_A(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})), \tilde{\Phi}_*(\mathbf{t})(\frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}})) \in [\mathcal{T}^E(\oplus^k E)]_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})}$$

si, y sólo si,

$$\rho(pr_A(\tilde{\Phi}(\mathbf{t}))) = T_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \tilde{\tau}(\tilde{\Phi}_*(\mathbf{t})) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right),$$

o equivalentemente

$$\rho_\alpha^i \phi_A^\alpha = \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A}.$$

Esta última condición se verifica por ser  $\Phi : T\mathbb{R}^k \rightarrow E$  morfismo de algebroides de Lie, véase la ecuación (5.47).

□

**Proposición 5.34** Sea  $L : \oplus^k E \rightarrow \mathbb{R}$  una función lagrangiana y  $\Phi : T\mathbb{R}^k \rightarrow E$  morfismo de algebroides de Lie con aplicación asociada  $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^k \rightarrow \oplus^k E$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1)  $\tilde{\Phi}$  satisface el sistema de ecuaciones

$$\sum_{A=1}^k \iota_{[\tilde{\tau}_{\oplus E}^{k,A}(\tilde{\Phi}(\mathbf{t}), \tilde{\Phi}^{(1)}(\mathbf{t}))]} \Omega_L^A(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})) = dE_L(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})), \forall t, \quad 1 \leq A \leq k, \quad (5.48)$$

donde  $[\tilde{\tau}_{\oplus E}^{k,A}(\tilde{\Phi}(\mathbf{t}), \tilde{\Phi}^{(1)}(\mathbf{t}))] \in [\mathcal{T}^E(\oplus^k E)]_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})}$  como hemos comprobado en el lema anterior. Recordemos que  $d = d^{\mathcal{T}^E(\oplus^k E)}$ .

(2)  $\tilde{\Phi}$  es solución del siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k \frac{d}{dt^A} \left( \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha} \right) &= \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \phi_C^\beta \mathfrak{C}_{\beta\alpha}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_C^\gamma} \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} &= \phi_A^\alpha \rho_\alpha^i, \\ 0 &= \frac{\partial \phi_A^\alpha}{\partial t^B} - \frac{\partial \phi_B^\alpha}{\partial t^A} + \mathfrak{C}_{\beta\gamma}^\alpha \phi_B^\beta \phi_A^\gamma. \end{aligned} \quad (5.49)$$

**Observación 5.35** Nótese que si  $E$  es el algebroid de Lie estándar  $TQ$  entonces las ecuaciones (5.49) son las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (1.44) del formalismo  $k$ -simpléctico estándar. Así, denominaremos a estas ecuaciones **las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange en algebroides de Lie**.

◇

*Demostración:*

Sean  $(q^i, y^\alpha)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m}$  un sistema de coordenadas locales adaptadas en  $E$ ,  $(q^i, y_A^\alpha)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq A \leq k}$  el sistema local inducido en  $\bigoplus^k E$ ,  $\{e_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq m}$  una base local de secciones de  $\tau : E \rightarrow Q$ ,  $\{e_A\}_{1 \leq A \leq k}$  una base local de secciones de  $\tau_{\mathbb{R}^k} : T\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

En estos sistemas locales de coordenadas escribimos la expresión local de la aplicación  $\tilde{\Phi}$  asociada a un morfismo de algebroides de Lie  $\Phi$  como sigue:

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t}), \phi_A^\alpha(\mathbf{t})).$$

Considerando  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta^B\}$  una base local de secciones de  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$  se obtiene la siguiente expresión

$$\tilde{\tau}_{\bigoplus^k E}^{k,A}(\tilde{\Phi}(\mathbf{t}), \tilde{\Phi}^{(1)}(\mathbf{t})) = \phi_A^\alpha(\mathbf{t}) \mathcal{X}_\alpha(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})) + \left. \frac{\partial \phi_B^\beta}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} \mathcal{V}_\beta^B(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})), \quad 1 \leq A \leq k$$

y así teniendo en cuenta la expresión local (5.45) de  $\Omega_L^A$  se verifica

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k \iota_{\tilde{\tau}_k^{k,A}(\tilde{\Phi}(\mathbf{t}), \tilde{\Phi}^{(1)}(\mathbf{t}))} \Omega_L^A(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})) &= \phi_A^\alpha(\mathbf{t}) \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \mathcal{V}_B^\beta(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})) \\ &+ \left( \phi_A^\beta(\mathbf{t}) (\rho_\alpha^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\beta} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} - \rho_\beta^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\alpha} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} + \mathcal{C}_{\beta\alpha}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})}) \right. \\ &\left. - \frac{\partial \phi_B^\beta}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \right) \mathcal{X}^\alpha(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})). \end{aligned} \quad (5.50)$$

De las expresiones locales (5.27) y (5.46) de  $df$  y  $E_L$  obtenemos, para cada  $A = 1, \dots, k$ ,

$$\begin{aligned} dE_L(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})) &= \rho_\alpha^i \left( \phi_A^\beta(\mathbf{t}) \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\beta} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \right) \mathcal{X}^\alpha(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})) \\ &+ \phi_A^\alpha(\mathbf{t}) \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \mathcal{V}_B^\beta(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})), \end{aligned} \quad (5.51)$$

donde  $\{\mathcal{X}^\alpha, \mathcal{V}_B^\beta\}$  denota la base dual de la base local  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta^B\}$  de secciones de  $\tilde{\tau}_k^{\oplus E} : \mathcal{T}^E(\oplus^k E) \rightarrow \oplus^k E$ .

Por lo tanto, de (5.50) y (5.51) obtenemos que  $\Phi : T\mathbb{R}^k \rightarrow E$  es solución de la ecuación (5.48) si, y sólo si, se verifica

$$\begin{aligned} \phi_A^\beta \left( \rho_\alpha^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\beta} - \rho_\beta^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\alpha} + \mathcal{C}_{\beta\alpha}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma} \right) - \frac{\partial \phi_B^\beta}{\partial t^A} \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} &= \rho_\alpha^i \left( \phi_A^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\beta} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \\ \phi_A^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} &= \phi_A^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} &= \rho_\alpha^i \phi_A^\alpha \\ 0 &= \frac{\partial \phi_A^\alpha}{\partial t^B} - \frac{\partial \phi_B^\alpha}{\partial t^A} + \mathcal{C}_{\beta\gamma}^\alpha \phi_B^\beta \phi_A^\gamma, \end{aligned}$$

donde las dos últimas ecuaciones son consecuencia de la condición de morfismo (5.47). Obsérvese que la segunda ecuación es una identidad y así este sistema de

ecuaciones en derivadas parciales se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k \frac{d}{dt^A} \left( \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha} \right) &= \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \phi_C^\beta \mathfrak{C}_{\beta\alpha}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_C^\gamma} \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} &= \rho_\alpha^i \phi_A^\alpha, \\ 0 &= \frac{\partial \phi_A^\alpha}{\partial t^B} - \frac{\partial \phi_B^\alpha}{\partial t^A} + \mathfrak{C}_{\beta\gamma}^\alpha \phi_B^\beta \phi_A^\gamma. \end{aligned}$$

□

### Observación 5.36

- (1) Las ecuaciones (5.49) coinciden con la ecuaciones de Euler-Lagrange en Teorías Clásicas de Campos del formalismo multisimpléctico en algebroides de Lie. Véase E. Martínez, [97].
- (2) Si se reescriben las anteriores ecuaciones en el caso particular,  $k = 1$ , la condición de morfismo se reduce a la condición de admisibilidad (ecuación 2) y así se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange dadas por Weinstein en [140].
- (3) Cuando  $E = TQ$ , las ecuaciones (5.49) coinciden con las ecuaciones de Euler-Lagrange del formalismo  $k$ -simpléctico o de Günther, véase por ejemplo [56, 107, 119].

◇

Al igual que ocurre en el desarrollo de la formulación lagrangiana  $k$ -simpléctica estándar, las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden obtener como secciones integrales de ciertos SOPDE's. Este resultado se recoge en el siguiente teorema.

**Teorema 5.37** Sea  $L : \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano regular y

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E) \equiv \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \oplus \cdot^k \cdot \oplus \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$$

una sección de  $\tilde{\tau}_{\oplus E}^k$  tal que

$$\sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \Omega_L^A = dE_L, \quad (5.52)$$

donde  $d = d^{\mathcal{T}^E(\oplus E)}$ . Entonces:

(1)  $\xi$  es un SOPDE.

(2) Sea  $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^k \rightarrow \oplus^k E$  la aplicación asociada con un morfismo de algebroides de Lie entre  $T\mathbb{R}^k$  y  $E$ . Si  $\tilde{\Phi}$  es una sección integral de  $\xi$ , entonces  $\tilde{\Phi}$  satisface las ecuaciones (5.49) esto es, es una solución de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange escritas en términos de un algebroides de Lie  $E$ .

*Demostración:*

Escribiendo

$$\xi_A = \xi_A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + (\xi_A)_C^\alpha \mathcal{V}_\alpha^C, \quad A = 1, \dots, k$$

y considerando la expresión local (5.45) de  $\Omega_L^A$  obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \Omega_L^A &= \left( \xi_A^\beta \left( \rho_\alpha^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\beta} - \rho_\beta^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\alpha} + \mathcal{C}_{\beta\alpha}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma} \right) - (\xi_A)_B^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} \right) \mathcal{X}^\alpha \\ &+ \xi_A^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} \mathcal{V}_B^\beta, \end{aligned}$$

De la expresión anterior y de la expresión de  $dE_L$ , véase (5.51), se obtiene que  $\xi$  es una solución de las ecuaciones (5.52) si, y sólo si, se verifican las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \xi_A^\beta \left( \rho_\alpha^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\beta} - \rho_\beta^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\alpha} + \mathcal{C}_{\beta\alpha}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma} \right) - (\xi_A)_B^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} &= \rho_\alpha^i \left( y_A^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\beta} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right), \\ \xi_A^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} &= y_A^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha}. \end{aligned}$$

Si el lagrangiano  $L$  es regular, es decir, si la matriz  $\left( \frac{\partial^2 L}{\partial y_A^\alpha \partial y_B^\beta} \right)$  es regular, de la segunda ecuación obtenemos que

$$\xi_A^\alpha = y_A^\alpha, \quad (5.53)$$

esto es,  $\xi$  es un SOPDE y en este caso la primera de las ecuaciones anteriores se simplifica como sigue:

$$y_A^\beta \rho_\beta^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\alpha} + (\xi_A)^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial y_A^\alpha \partial y_B^\beta} = \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + y_A^\beta \mathfrak{C}_{\beta\alpha}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma}. \quad (5.54)$$

Demostremos ahora el item (2).

Sea  $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E$  la aplicación asociada con un morfismo de algebroides de Lie  $\Phi : T\mathbb{R}^k \rightarrow E$ .

Si  $\tilde{\Phi}(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t}), \phi_A^\alpha(\mathbf{t}))$  es una sección integral del SOPDE  $\xi$  solución de (5.52) entonces de la condición de sección integral (5.40), la identidad (5.53) y (5.54) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\alpha} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} + \frac{\partial \phi_B^\beta}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial^2 L}{\partial y_A^\alpha \partial y_B^\beta} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} &= \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} + \phi_A^\beta \mathfrak{C}_{\beta\alpha}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})}, \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} &= \rho_\alpha^i \phi_A^\alpha(\mathbf{t}), \\ 0 &= \frac{\partial \phi_A^\alpha}{\partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial \phi_B^\alpha}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \mathfrak{C}_{\beta\gamma}^\alpha \phi_B^\beta(\mathbf{t}) \phi_A^\gamma(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

donde la última ecuación es una consecuencia de la condición de morfismo de algebroides de Lie (5.47). Las ecuaciones anteriores se pueden escribir como sigue

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \right) &= \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} + \phi_C^\beta \mathfrak{C}_{\beta\alpha}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_C^\gamma} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} &= \rho_\alpha^i \phi_A^\alpha(\mathbf{t}), \\ 0 &= \frac{\partial \phi_A^\alpha}{\partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial \phi_B^\alpha}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \mathfrak{C}_{\beta\gamma}^\alpha \phi_B^\beta(\mathbf{t}) \phi_A^\gamma(\mathbf{t}), \end{aligned} \quad (5.55)$$

obteniéndose las ecuaciones (5.49) .

□

**Observación 5.38** Si reescribimos esta sección en el caso particular  $k = 1$ , reobtenemos la descripción de Mecánica lagrangiana en términos de algebroides de Lie (Ver sección 3.1 en [24] o sección 2.2 en [72]).

E. Caso particular: Formalismo lagrangiano  $k$ -simpléctico estándar

En este apartado vamos a describir el formalismo lagrangiano  $k$ -simpléctico estándar como un caso particular del formalismo lagrangiano en algebroides de Lie.

Como ya hemos comentado anteriormente elegimos como algebroides de Lie  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$ ; en este caso las constantes de estructura  $\mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma = 0$ . Entonces

- La variedad  $\bigoplus^k E$  se identifica con  $T_k^1 Q$ ,  $\mathcal{T}^{TQ}(T_k^1 Q)$  con  $T(T_k^1 Q)$  y  $(\mathcal{T}^{TQ})_k^1(T_k^1 Q)$  con  $T_k^1(T_k^1 Q)$ .
- La función energía  $E_L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  es  $E_L = \sum_{A=1}^k \Delta_A(L) - L$  donde los campos de vectores  $\Delta_A$  en  $T_k^1 Q$  se obtienen como hemos explicado en la observación 5.19 .
- Una sección  $\xi : \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$  se corresponde con un campo de  $k$ -vectores  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  en  $T_k^1 Q$ , esto es,  $\xi$  es una sección de  $\tau_{T_k^1 Q}^k : T_k^1(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q$ .
- Un SOPDE  $\xi$  es un campo de  $k$ -vectores en  $T_k^1 Q$  que es una sección de la aplicación  $T_k^1(\tau_Q^k) : T_k^1(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q$ .
- Sea  $f$  a función en  $T_k^1 Q$  entonces

$$d^{\mathcal{T}^{TQ}(T_k^1 Q)} f(Y) = df(Y)$$

donde  $df$  denota la diferencial estándar e  $Y$  es un campo de vectores en  $T_k^1 Q$ .

- Se verifica que

$$\Omega_L^A(X, Y) = \omega_L^A(X, Y), \quad A = 1, \dots, k$$

donde  $\omega_L^A$  denota las 2-formas lagrangianas del formalismo  $k$ -simpléctico estándar definidas por  $\omega_L^A = -d(dL \circ J^A)$ .

- Así, en el formalismo  $k$ -simpléctico estándar la ecuación (5.52) se escribe como sigue:

$$\sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \omega_L^A = dE_L,$$

que coincide con las ecuaciones geométricas de Euler-Lagrange (1.45) del formalismo  $k$ -simpléctico estándar.



- Como ya hemos señalado en la Observación 5.30 la aplicación  $\tilde{\Phi}$  coincide con  $\phi^{(1)}$ .

En el caso estándar una aplicación  $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  induce un morfismo de algebroides de Lie  $\Phi = (T\phi, \phi)$  entre  $T\mathbb{R}^k$  y  $TQ$ . En este caso, la aplicación asociada  $\tilde{\Phi}$  a este morfismo coincide con la primera prolongación  $\phi^{(1)}$  de  $\phi$  dada por

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{t}) = (T\phi(\frac{\partial}{\partial t^1}\big|_{\mathbf{t}}), \dots, T\phi(\frac{\partial}{\partial t^k}\big|_{\mathbf{t}})) = \phi^{(1)}(\mathbf{t}).$$

Así, del teorema 5.37 y las ocho observaciones anteriores, deducimos el siguiente corolario donde reobtenemos la formulación lagrangiana  $k$ -simpléctica estándar, véase [56, 107, 119] y la sección 1.2.4 del Capítulo 1 de esta memoria.

**Corolario 5.39** *Sea  $L: T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano regular y  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  un campo de  $k$ -vectores en  $T_k^1 Q$  tal que*

$$\sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \omega_L^A = dE_L.$$

*Entonces:*

- (1)  $\xi$  es un SOPDE
- (2) Si  $\tilde{\Phi}$  es una sección integral del campo de  $k$ -vectores  $\xi$ , entonces  $\tilde{\Phi}$  es una solución de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange del formalismo lagrangiano  $k$ -simpléctico estándar, esto es,

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A}\bigg|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i}\bigg|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}\bigg|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \quad , \quad v_A^i(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})) = \frac{\partial(q^i \circ \tilde{\Phi})}{\partial t^A}\bigg|_{\mathbf{t}}.$$

La relación entre los elementos geométricos del formalismo  $k$ -simpléctico Lagrangiano estándar y en algebroides de Lie, se resume a continuación:

- Funciones lagrangianas.
  - Algebroides de Lie:

$$L: \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}.$$

- Estándar:

$$L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}.$$

■ Secciones lagrangianas.

- Algebroides de Lie:

$$\Omega_L^A : \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E))^* \wedge (\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E))^*, \quad A = 1, \dots, k.$$

- Estándar:

$$\omega_L^A : T_k^1 Q \rightarrow T^*(T_k^1 Q) \wedge T^*(T_k^1 Q), \quad A = 1, \dots, k.$$

■ Ecuaciones algebraicas.

- Algebroides de Lie:

$$\sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \Omega_L^A = dE_L,$$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$  es una sección del fibrado  $k$ -prolongación  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E) = \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$ .

- Estándar:

$$\sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \omega_L^A = dE_L,$$

$(\xi_1, \dots, \xi_k) : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1(T_k^1 Q)$  es un campo de  $k$ -vectores en  $T_k^1 Q$ .

■ Ecuaciones de campo.

- Algebroides de Lie:

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \right) = \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} + \phi_C^\beta \mathfrak{C}_{\beta\alpha}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_C^\gamma} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})}$$

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} = \phi_A^\alpha(\mathbf{t}) \rho_\alpha^i,$$

$$0 = \frac{\partial \phi_A^\alpha}{\partial t^B} - \frac{\partial \phi_B^\alpha}{\partial t^A} + \mathfrak{C}_{\beta\gamma}^\alpha \phi_B^\beta \phi_A^\gamma,$$

Las soluciones de estas ecuaciones son aplicaciones

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^k &\rightarrow \bigoplus^k E \\ t &\mapsto \tilde{\Phi}(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t}), \Phi_A^\alpha(\mathbf{t}))\end{aligned}$$

- Estándar:

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \quad , \quad v_A^i(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})) = \frac{\partial(q^i \circ \tilde{\Phi})}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}.$$

Las soluciones de estas ecuaciones son aplicaciones

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^k &\rightarrow T_k^1 Q \\ t &\mapsto \tilde{\Phi}(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t}), \Phi_A^i(\mathbf{t}))\end{aligned}$$

### 5.3.4. Ejemplos.

#### A. Modelo Poisson sigma.

En este primer ejemplo se verifica

$$E = T^*Q \quad \text{y} \quad k = 2$$

siendo  $(Q, \{\cdot, \cdot\})$  una variedad de Poisson.

Consideremos una variedad de Poisson  $(Q, \{\cdot, \cdot\})$ . Entonces, como hemos visto en la sección 5.1.2, el fibrado cotangente  $T^*Q$  tiene una estructura de algebroid de Lie, con ancla  $\rho$  y corchete determinados por

$$\begin{aligned}\rho(\alpha) &= \hat{\Pi}(\alpha), \\ \llbracket \alpha, \beta \rrbracket_{T^*Q} &= \mathcal{L}_{\hat{\Pi}(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\hat{\Pi}(\beta)}\alpha + d(\Pi(\alpha, \beta)),\end{aligned}$$

donde  $\alpha, \beta \in \text{Sec}(T^*Q)$ ,  $\mathcal{L}_X$  denota la derivada de Lie y  $\hat{\Pi}: T^*Q \rightarrow TQ$ , se define por

$$\beta(\hat{\Pi}(\alpha)) = \Pi(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in T_{\mathbf{q}}^*Q,$$

es la aplicación inducida por el campo de bivectores  $\Pi$  asociado a la variedad de Poisson.

En coordenadas locales, el bivector  $\Pi$  en un punto  $q \in Q$  tiene la expresión

$$\Pi = \frac{1}{2} \Lambda^{ij} \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial q^j}.$$

Podemos considerar como lagrangiano para el modelo Poisson Sigma una función definida en  $T^*Q \oplus_Q T^*Q$ . Así si  $(q^i, p_i^1, p_i^2)$  denota las coordenadas locales  $T^*Q \oplus_Q T^*Q$ , la expresión local del lagrangiano es (véase [96])

$$L(q^i, p_i^1, p_i^2) = -\frac{1}{2} \Lambda^{ij} p_i^1 p_j^2.$$

A continuación vamos a considerar las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.49) para el lagrangiano

$$L: T^*Q \oplus T^*Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(q^i, p_i^1, p_i^2) = -\frac{1}{2} \Lambda^{ij} p_i^1 p_j^2.$$

Un largo cálculo muestra que la primera ecuación de (5.49), esto es, la ecuación

$$\sum_{A=1}^k \frac{d}{dt^A} \left( \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha} \right) = \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + y_A^\beta \mathfrak{C}_{\beta\alpha}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma}$$

se reduce a

$$\frac{1}{2} \Lambda^{ij} \left( \frac{\partial p_i^2}{\partial t^1} - \frac{\partial p_i^1}{\partial t^2} + \frac{\partial \Lambda^{kl}}{\partial q^i} p_k^1 p_l^2 \right) = 0.$$

y teniendo en cuenta la condición de morfismo esta ecuación se verifica por lo que las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (5.49) son en este caso particular

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^i}{\partial t^A} + \Lambda^{ij} p_j^A &= 0, \\ \frac{\partial p_i^2}{\partial t^1} - \frac{\partial p_i^1}{\partial t^2} + \frac{\partial \Lambda^{kl}}{\partial q^i} p_k^1 p_l^2 &= 0. \end{aligned}$$

Consideremos la 1-formas en  $\mathbb{R}^2$  dadas por  $P_j = p_j^1 dt^1 + p_j^2 dt^2$  ( $j = 1, \dots, n$ ), entonces las anteriores ecuaciones puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned} dq^j + \Lambda^{jk} P_k &= 0 \\ dP_j + \frac{1}{2} \Lambda_{,j}^{kl} P_k \wedge P_l &= 0, \end{aligned}$$

donde  $\Lambda_{,j}^{kl} := \partial \Lambda^{kl} / \partial q^j$ . Esta es la forma usual en la que aparecen las ecuaciones para el modelo Poisson Sigma, véase T. Strobl [130].

**Observación 5.40** El modelo Poisson sigma es un ejemplo de teoría de campos topológicos de dimensión 2 asociadas a una variedad de Poisson. Fueron introducidos por P. Schaller y T. Strobl [127] y N. Ikeda [58] y se aplican al estudio de modelos gravitacionales de dimensión 2.

◇

B. Sistemas con simetría.

Consideremos un fibrado principal  $\pi : \bar{Q} \longrightarrow Q = \bar{Q}/G$  con grupo de estructura  $G$ , entonces una conexión principal  $A$  en  $\bar{Q}$  es una 1-forma con valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $A : T\bar{Q} \rightarrow \mathfrak{g}$  tal que:

- (i) Para todo  $\xi \in \mathfrak{g}$  y para todo  $\bar{q} \in \bar{Q}$ ,  $A(\xi_{\bar{Q}}(\bar{q})) = \xi$ , y
- (ii)  $A(T_{\bar{q}}\varphi_g(v_{\bar{q}})) = Ad_g(A(v_{\bar{q}}))$  donde  $\varphi : \bar{Q} \times G \rightarrow \bar{Q}$  denota la acción de  $G$  sobre  $\bar{Q}$  y  $Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  la acción adjunta de  $G$ .

Fijemos una conexión principal  $A : T\bar{Q} \longrightarrow \mathfrak{g}$  con curvatura  $B : T\bar{Q} \oplus T\bar{Q} \longrightarrow \mathfrak{g}$ . La conexión  $A$  determina un isomorfismo entre los fibrados vectoriales  $T\bar{Q}/G \rightarrow Q$  y  $TQ \oplus \tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow Q$  donde  $\tilde{\mathfrak{g}} = (\bar{Q} \times \mathfrak{g})/G$  es el fibrado adjunto (véase [21]):

$$[v_{\bar{q}}] \leftrightarrow T_{\bar{q}}\pi(v_{\bar{q}}) \oplus [(\bar{q}, A(v_{\bar{q}}))]$$

donde  $v_{\bar{q}} \in T_{\bar{q}}\bar{Q}$ .

La conexión principal  $A$  nos permite obtener una base local de secciones de

$$\text{Sec}(T\bar{Q}/G) = \mathfrak{X}(Q) \oplus \text{Sec}(\tilde{\mathfrak{g}})$$

como sigue. En primer lugar, elegimos una trivialización local del fibrado principal  $\pi : \bar{Q} \rightarrow q = \bar{Q}/G$ , por ejemplo  $U \times G$ , donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $Q = \bar{Q}/G$ . Así consideramos el fibrado principal trivial  $\pi : U \times G \rightarrow U$  con grupo de estructura  $G$  actuando sólo sobre el segundo factor por la multiplicación por la izquierda. Sea  $e$  el elemento identidad del grupo de Lie  $G$ ,  $(q^i)$ ,  $1 \leq i \leq \dim Q$  son coordenadas locales en  $U$  y  $\{\xi_a\}$  una base de  $\mathfrak{g}$ .

Vamos a describir ahora las secciones del fibrado adjunto  $\tilde{\mathfrak{g}}$ .

Un elemento de  $\text{Sec}(\tilde{\mathfrak{g}})$  es una aplicación de la forma:

$$[\bar{q}]_G \in Q = \bar{Q}/G \mapsto [(\bar{q}, \xi)]_G \in \tilde{\mathfrak{g}} = (\bar{Q} \times \mathfrak{g})/G,$$

por lo que el conjunto de estas secciones se identifica con el conjunto de campos de vectores invariantes a la izquierda  $\xi_a^L$ :

$$\xi_a^L(g) = T_e L_g(\xi_a)$$

donde  $L_g : G \longrightarrow G$  es la translación a la izquierda por  $g \in G$ .

Teniendo en cuenta la identidad  $\text{Sec}(T\bar{Q}/G) = \mathfrak{X}(Q) \oplus \text{Sec}(\tilde{\mathfrak{g}})$ , a partir de los elementos de  $\mathfrak{X}(Q)$  y de  $\text{Sec}(\tilde{\mathfrak{g}})$ , obtenemos una base local de  $\text{Sec}(T\bar{Q}/G)$  dada por:

$$\left\{ e_i = \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right)^h, e_a = \xi_a^L \right\}$$

donde  $\left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right)^h$  es el campo de vectores en  $U \times G$  que se obtiene mediante el levantamiento horizontal de  $\frac{\partial}{\partial q^i} \in \mathfrak{X}(Q)$ . Si

$$A \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{q}, e)} \right) = A_i^a \xi_a$$

entonces el levantamiento horizontal del campo de vectores en  $\frac{\partial}{\partial q^i}$  en  $U$  es el campo de vectores  $\left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right)^h$  en  $U \times G$  dado por

$$\left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right)^h = \frac{\partial}{\partial q^i} - A_i^a \xi_a^L.$$

Así el conjunto

$$\left\{ e_i = \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right)^h, e_a = \xi_a^L \right\}$$

es por construcción  $G$ -invariante y define una base local de secciones  $\{e_i, e_a\}$  de  $\text{Sec}(T\bar{Q}/G) = \mathfrak{X}(Q) \oplus \text{Sec}(\tilde{\mathfrak{g}})$ .

Teniendo en cuenta esta base de secciones, a cada  $q = [\bar{q}]_G \in Q$  le asociamos un elemento de  $T\bar{Q}/G$  de la forma

$$y^i e_i(q) + y^a e_a(q).$$

Así obtenemos las coordenadas locales inducidas  $(q^i, y^i, y^a)$  de  $T\bar{Q}/G$ .

Se puede demostrar que  $T\bar{Q}/G$  tiene una estructura de algebroide de Lie sobre  $Q = \bar{Q}/G$  (véase M. de León, J. C. Marrero y E. Martínez [72]). Este algebroide  $\tau_Q|G: E = T\bar{Q}/G \rightarrow Q = \bar{Q}/G$  se denomina algebroide de Atiyah.

Denotamos como antes por  $(q^i, y^i, y^a)$  las coordenadas locales inducidas de  $T\bar{Q}/G$ . Si  $c_{ab}^c$  son las constantes de estructura del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  con respecto a la base  $\{\xi_a\}$  y

$$B \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{q}, e)}, \frac{\partial}{\partial q^j} \Big|_{(\mathbf{q}, e)} \right) = B_{ij}^a \xi_a$$

donde

$$B_{ij}^c = \frac{\partial A_i^c}{\partial q^j} - \frac{\partial A_j^c}{\partial q^i} - c_{ab}^c A_i^a A_j^b.$$

entonces las funciones de estructura del algebroide de Lie  $T\bar{Q}/G \rightarrow Q$  están determinadas por las siguientes relaciones (véase [72]):

$$\begin{aligned} \llbracket e_i, e_j \rrbracket_{T\bar{Q}/G} &= -B_{ij}^c e_c \\ \llbracket e_i, e_a \rrbracket_{T\bar{Q}/G} &= c_{ab}^c A_i^b e_c \\ \llbracket e_a, e_b \rrbracket_{T\bar{Q}/G} &= c_{ab}^c e_c \\ \rho_{T\bar{Q}/G}(e_i) &= \frac{\partial}{\partial q^i} \\ \rho_{T\bar{Q}/G}(e_a) &= 0. \end{aligned}$$

Así las funciones de estructura del algebroide de Atiyah  $\tau_Q|G: E = T\bar{Q}/G \rightarrow Q = \bar{Q}/G$  respecto al sistema local de coordenadas  $(q^i)$  y la base local  $\{e_i, e_a\}$  de  $Sec(T\bar{Q}/G)$  son:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ij}^k &= \mathcal{C}_{ia}^k = -\mathcal{C}_{ai}^k = \mathcal{C}_{ab}^k = 0, & \mathcal{C}_{ij}^a &= -B_{ij}^a, & \mathcal{C}_{ia}^c &= -\mathcal{C}_{ai}^c = c_{ab}^c A_i^b \\ \mathcal{C}_{ab}^c &= c_{ab}^c, & \rho_j^i &= \delta_{ij}, & \rho_a^i &= \rho_a^i = \rho_a^b = 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Ahora, consideremos una función lagrangiana  $L : \bigoplus^k T\bar{Q}/G \rightarrow \mathbb{R}$  entonces las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^A} \left( \frac{\partial L}{\partial y_A^i} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q^i} + B_{ij}^c y_C^j \frac{\partial L}{\partial y_C^c} - c_{ab}^c A_i^b y_C^a \frac{\partial L}{\partial y_C^c} \\ \frac{d}{dt^A} \left( \frac{\partial L}{\partial y_A^a} \right) &= c_{ab}^c A_i^b y_C^i \frac{\partial L}{\partial y_C^c} - c_{ab}^c y_C^b \frac{\partial L}{\partial y_C^c} \\ 0 &= \frac{\partial y_A^i}{\partial t^B} - \frac{\partial y_B^i}{\partial t^A} \\ 0 &= \frac{\partial y_A^c}{\partial t^B} - \frac{\partial y_B^c}{\partial t^A} - B_{ij}^c y_B^i y_A^j + c_{ab}^c A_i^b y_B^i y_A^a + c_{ab}^c y_A^b y_B^a \end{aligned}$$

En este caso cuando  $Q$  es un único punto, esto es  $\bar{Q} = G$  entonces  $T\bar{Q}/G = \mathfrak{g}$  y entonces el lagrangiano está definido como una función  $L : \bigoplus^k \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  y las ecuaciones anteriores se reducen ahora a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^A} \left( \frac{\partial L}{\partial y_A^a} \right) &= -c_{ab}^c y_C^b \frac{\partial L}{\partial y_C^c} \\ 0 &= \frac{\partial y_A^c}{\partial t^B} - \frac{\partial y_B^c}{\partial t^A} + c_{ab}^c y_A^b y_B^a. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones coinciden con la expresión local de las ecuaciones de Euler-Poincaré que podemos encontrar en [18, 19, 20, 97]). Por ejemplo en [19] los autores obtienen estas ecuaciones en el estudio de algunos ejemplos de aplicaciones armónicas desde el enfoque variacional.

## 5.4. Formalismo hamiltoniano.

En esta sección desarrollamos el formalismo hamiltoniano  $k$ -simpléctico en algebroides de Lie, que generaliza la Mecánica hamiltoniana en algebroides de Lie, véase [24, 72], y el formalismo hamiltoniano  $k$ -simpléctico estándar, véase capítulo 1. La estructura de esta sección es similar a la del caso lagrangiano que se acaba de describir.

Sea  $(E, [\cdot, \cdot]_E, \rho)$  un algebroid de Lie sobre una variedad  $Q$ . Para el enfoque hamiltoniano se considera el fibrado dual de  $E$ , esto es, el fibrado  $\tau^* : E^* \rightarrow Q$ .

### 5.4.1. Elementos geométricos.

A. La variedad  $\bigoplus^k E^*$ .

Recordemos que el formalismo  $k$ -simpléctico hamiltoniano estándar se desarrolla sobre el fibrado de las  $k^1$ -covelocidades

$$(T_k^1)^*Q = T^*Q \oplus \dots \oplus T^*Q.$$

Pensando un algebroid de Lie  $E$  como un sustituto del fibrado tangente y su dual  $E^*$  un sustituto del fibrado cotangente, es natural pensar que el análogo de  $(T_k^1)^*Q$  sea la suma de Whitney sobre  $Q$  de  $k$  copias del espacio dual  $E^*$ .



Denotaremos por  $\bigoplus^k E^*$  la suma de Whitney de  $k$  copias del fibrado vectorial  $E^*$ , dual del algebroid de Lie  $E$ , esto es,

$$\bigoplus^k E^* = E^* \oplus \dots \oplus E^*.$$

Así los elementos de  $\bigoplus^k E^*$  vienen dados por  $k$ -tuplas

$$a_{\mathbf{q}}^* = (a_{1\mathbf{q}}^*, \dots, a_{k\mathbf{q}}^*)$$

de elementos de la fibra  $E_{\mathbf{q}}^*$  de  $E^*$  sobre un mismo punto  $\mathbf{q} \in Q$ .

Denotaremos por  $\tilde{\tau}^*: \bigoplus^k E^* \rightarrow Q$  la proyección canónica definida por

$$\tilde{\tau}^*(a_{1\mathbf{q}}^*, \dots, a_{k\mathbf{q}}^*) = \mathbf{q}.$$

Dado un sistema local de coordenadas  $(q^i, y_\alpha)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m}$  en un conjunto abierto  $(\tau^*)^{-1}(U) \subset E^*$ , siendo  $(q^i)_{1 \leq i \leq n}$  las coordenadas en un abierto  $U$  de la variedad base  $Q$ , se define el sistema de coordenadas locales  $(q^i, y_\alpha^A)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq A \leq k}$  en  $(\tilde{\tau}^*)^{-1}(U) \subset \bigoplus^k E^*$  como sigue:

$$q^i(a_{1\mathbf{q}}^*, \dots, a_{k\mathbf{q}}^*) = q^i(\mathbf{q}), \quad y_\alpha^A(a_{1\mathbf{q}}^*, \dots, a_{k\mathbf{q}}^*) = y_\alpha(a_{A\mathbf{q}}^*), \quad (5.57)$$

en donde  $(a_{1\mathbf{q}}^*, \dots, a_{k\mathbf{q}}^*) \in \bigoplus^k E^*$ . Estas coordenadas dotan a  $\bigoplus^k E^*$  de una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $n + km$ .

B. La prolongación de  $E$  mediante  $\tilde{\tau}^*: \bigoplus^k E^* \rightarrow Q$ .

En la sección 5.2 hemos recordado la definición de la prolongación de un algebroid de Lie  $E$  mediante una fibración. Para el desarrollo de la formulación  $k$ -simpléctica hamiltoniana en algebroides de Lie vamos a considerar el caso particular de prolongación en el que

$$P = \bigoplus^k E^* = E^* \oplus \dots \oplus E^*$$

y la fibración es

$$\tilde{\tau}^*: \bigoplus^k E^* \rightarrow Q,$$

es decir, vamos a considerar el espacio

$$\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) = \{(a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}^*}) \in E \times T(\bigoplus^k E^*) / \rho(a_{\mathbf{q}}) = T(\tilde{\tau}^*)(v_{b_{\mathbf{q}}^*})\}. \quad (5.58)$$

Teniendo en cuenta los contenidos de la Sección 5.2, y considerando el caso particular  $P = E^* \oplus \dots \oplus E^*$  obtenemos:

- (1)  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E^*)$  es un algebroides de Lie sobre  $\bigoplus^k E^*$  con proyección

$$\tilde{\tau}_{\bigoplus E^*}^k : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E^*) \rightarrow \bigoplus^k E^*$$

y estructura de algebroides de Lie  $([\cdot, \cdot]^{\tilde{\tau}^*}, \rho^{\tilde{\tau}^*})$  donde la aplicación ancla

$$\rho^{\tilde{\tau}^*} : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) = E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E^*) \rightarrow T(\bigoplus^k E^*)$$

es la proyección sobre el segundo factor.

- (2) Si  $(q^i, y_{\alpha}^A)$  denota un sistema local de coordenadas de  $\bigoplus^k E^*$  entonces el sistema de coordenadas locales inducido en  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E^*)$  es

$$(q^i, y_{\alpha}^A, z^{\alpha}, w_{\alpha}^A)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \ell \leq n', 1 \leq \alpha \leq m}$$

donde, véase (5.15),

$$\begin{aligned} q^i(a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}^*}) &= q^i(\mathbf{q}), & y_{\alpha}^A(a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}^*}) &= y_{\alpha}^A(b_{\mathbf{q}}^*), \\ z^{\alpha}(a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}^*}) &= y^{\alpha}(a_{\mathbf{q}}), & w_{\alpha}^A(a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}^*}) &= v_{b_{\mathbf{q}}^*}(y_{\alpha}^A). \end{aligned} \quad (5.59)$$

- (3) De (5.16) obtenemos que el conjunto  $\{\mathcal{X}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\alpha}^A\}$  definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\alpha}: \quad \bigoplus^k E^* &\rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \\ b_{\mathbf{q}}^* &\mapsto \mathcal{X}_{\alpha}(b_{\mathbf{q}}^*) = (e_{\alpha}(\mathbf{q}); \rho_{\alpha}^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{b_{\mathbf{q}}^*}) \\ \mathcal{V}_{\alpha}^A: \quad \bigoplus^k E^* &\rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \\ b_{\mathbf{q}}^* &\mapsto \mathcal{V}_{\alpha}^A(b_{\mathbf{q}}^*) = (0_{\mathbf{q}}; \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}^A} \Big|_{b_{\mathbf{q}}^*}), \end{aligned} \quad (5.60)$$

es una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E^*}^k : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \rightarrow \bigoplus^k E^*$ .

Denotaremos por  $Sec(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*))$  el conjunto de secciones de la proyección  $\tilde{\tau}_k : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \rightarrow \bigoplus^k E^*$ .

- (4) A cada sección  $\xi: \bigoplus^k E^* \rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E^*)$  de  $\tilde{\tau}_k$  le asociamos un campo de vectores por medio del ancla del algebroid

$$\rho^{\tilde{\tau}^*}: \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \rightarrow T(\bigoplus^k E^*).$$

Si  $\xi$  se escribe localmente como sigue:

$$\xi = \xi^\alpha \mathcal{X}_\alpha + \xi_\alpha^A \mathcal{V}_A^\alpha \in Sec(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*))$$

entonces, reescribiendo la expresión (5.17) para este caso particular obtenemos,

$$\rho^{\tilde{\tau}^*}(\xi) = \rho_\alpha^i \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi_\alpha^A \frac{\partial}{\partial y_\alpha^A} \in \mathfrak{X}(\bigoplus^k E^*). \quad (5.61)$$

- (5) El corchete de Lie de secciones de  $\tilde{\tau}_k$  queda determinado a partir del corchete de los elementos de una base de secciones,

$$[\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta]^{\tilde{\tau}^*} = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}_\gamma \quad [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_B^\beta]^{\tilde{\tau}^*} = 0 \quad [\mathcal{V}_A^\alpha, \mathcal{V}_B^\beta]^{\tilde{\tau}^*} = 0, \quad (5.62)$$

- (6) Si  $\{\mathcal{X}^\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}$  es la base dual de  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_A^\alpha\}$ , de las expresiones (5.20) que caracterizan la diferencial exterior en el algebroid prolongación obtenemos que

$$\begin{aligned} d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)} f &= \rho_\alpha^i \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathcal{X}^\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_\alpha^A} \mathcal{V}_\alpha^A, \quad \text{para } f \in \mathcal{C}^\infty(\bigoplus^k E^*) \\ d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)} \mathcal{X}^\gamma &= -\frac{1}{2} \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{X}^\beta, \quad d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)} \mathcal{V}_\gamma^A = 0. \end{aligned} \quad (5.63)$$

A lo largo de esta sección denotaremos por  $d$  la diferencial exterior en el fibrado prolongación  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$ , esto es,

$$d \equiv d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)}.$$

**Observación 5.41** En el caso particular  $E = TQ$  la variedad  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$  se identifica con  $T((T_k^1)^*Q)$ .

En efecto, puesto que  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  en este caso consideramos la prolongación de  $TQ$  sobre  $\pi_Q^k : (T_k^1)^*Q \rightarrow Q$ . Así de (5.58) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{TQ}(\oplus^k T^*Q) &= \mathcal{T}^{TQ}((T_k^1)^*Q) \\
&= \{(u_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{w}_{\mathbf{q}}^*}) \in TQ \times T((T_k^1)^*Q) / u_{\mathbf{q}} = T(\pi_Q^k)(v_{\mathbf{w}_{\mathbf{q}}^*})\} \\
&= \{(T(\pi_Q^k)(v_{\mathbf{w}_{\mathbf{q}}^*}), v_{\mathbf{w}_{\mathbf{q}}^*}) \in TQ \times T((T_k^1)^*Q) / w_{\mathbf{q}}^* \in (T_k^1)^*Q\} \\
&\equiv \{v_{\mathbf{w}_{\mathbf{q}}^*} \in T((T_k^1)^*Q) / w_{\mathbf{q}} \in (T_k^1)^*Q\} \equiv T((T_k^1)^*Q)
\end{aligned} \tag{5.64}$$

◇

C. El fibrado vectorial  $\mathcal{T}^E(\oplus^k E^*) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\oplus^k E^*)$ .

En la descripción de la formulación hamiltoniana  $k$ -simpléctica en algebroides de Lie tienen especial interés los campos de  $k$ -vectores en  $(T_k^1)^*Q$ , esto es, las secciones de

$$\tau_{(T_k^1)^*Q}^k : T_k^1((T_k^1)^*Q) \rightarrow (T_k^1)^*Q.$$

Pensando un algebroide de Lie  $E$  como un sustituto del fibrado tangente y teniendo en cuenta que  $\mathcal{T}^E(\oplus^k E^*)$  juega el papel de  $T((T_k^1)^*Q)$  es natural pensar que la suma de Whitney de  $k$  copias de  $\mathcal{T}^E(\oplus^k E^*)$ , esto es, el fibrado

$$\mathcal{T}^E(\oplus^k E^*) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\oplus^k E^*)$$

jugará el papel de

$$T_k^1((T_k^1)^*Q) = T((T_k^1)^*Q) \oplus \dots \oplus T((T_k^1)^*Q).$$

Denotaremos por  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\oplus^k E^*)$  la suma de Whitney de  $k$  copias del algebroide de Lie  $\mathcal{T}^E(\oplus^k E^*)$ , esto es,

$$(\mathcal{T}^E)_k^1(\oplus^k E^*) := \mathcal{T}^E(\oplus^k E^*) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\oplus^k E^*).$$

Así los elementos de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E^*)$  son de la forma

$$((a_{1\mathbf{q}}, v_{1b_{\mathbf{q}}^*}), \dots, (a_{k\mathbf{q}}, v_{kb_{\mathbf{q}}^*}))$$

donde cada  $(a_{A\mathbf{q}}, v_{Ab_{\mathbf{q}}^*})$  pertenece a la fibra  $(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*))_{b_{\mathbf{q}}^*} = E_{\mathbf{q}} \times_{TQ} (T_{b_{\mathbf{q}}^*}(\bigoplus^k E^*))$ .

Denotaremos por  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E^*}^k : (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E^*) \rightarrow \bigoplus^k E^*$  la proyección canónica dada por:

$$\tilde{\tau}_{\bigoplus E^*}^k((a_{1\mathbf{q}}, v_{1b_{\mathbf{q}}^*}), \dots, (a_{k\mathbf{q}}, v_{kb_{\mathbf{q}}^*})) = b_{\mathbf{q}}^*.$$

Denominamos  **$k$ -prolongación de  $E$  sobre  $\tilde{\tau}^* : \bigoplus^k E^* \rightarrow Q$**  al fibrado

$$\tilde{\tau}_k^k : (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E^*) \rightarrow \bigoplus^k E^*.$$

En la descripción hamiltoniana  $k$ -simpléctica en algebroides de lie nos interesará considerar secciones de este fibrado. Además a partir del ancla

$$\rho^{\tilde{\tau}^*} : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \rightarrow T(\bigoplus^k E^*)$$

podemos definir un campo de  $k$ -vectores en  $\bigoplus^k E^*$  asociado a cada sección de  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E^*}^k$ , tal como veremos en los dos resultados siguientes:

**Lema 5.42** Sea  $\xi : \bigoplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E^*)$  una sección de la proyección  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E^*}^k$ . Entonces  $\xi$  define una familia  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  de secciones de  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E^*}^k : \bigoplus^k E^* \rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$ .

*Demostración:*

Teniendo en cuenta que  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E^*)$  es, por definición, la suma de Whitney de  $k$  copias del fibrado prolongación  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$ , la familia  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  se obtiene sin más que considerar la proyección sobre cada una de las copias tal como muestra el siguiente diagrama para cada  $A = 1, \dots, k$ .

$$\begin{array}{ccc} & (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E^*) = \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) & \\ & \nearrow \xi & \downarrow \tilde{\tau}_{\bigoplus E^*}^{k,A} \\ \bigoplus^k E^* & \xrightarrow{\xi_A} & \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{\oplus E^*}^{k,A} : (\mathcal{T}^E)_k^1(\oplus^k E^*) &\rightarrow \mathcal{T}^E(\oplus^k E^*) \\ ((a_{1\mathbf{q}}, v_{1\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*}), \dots, (a_{k\mathbf{q}}, v_{k\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*})) &\mapsto (a_{A\mathbf{q}}, v_{A\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*}) \end{aligned}$$

denota la proyección canónica sobre la  $A$ -ésima copia de  $\mathcal{T}^E(\oplus^k E^*)$  en  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\oplus^k E^*)$ .

□

**Proposición 5.43** Sea  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \oplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\oplus^k E^*)$  una sección de  $\tilde{\tau}_{\oplus E^*}^k$ . Entonces

$$(\rho^{\tilde{\tau}^*}(\xi_1), \dots, \rho^{\tilde{\tau}^*}(\xi_k)) : \oplus^k E^* \rightarrow T_k^1(\oplus^k E^*)$$

es un campo de  $k$ -vectores en  $\oplus^k E^*$ . Recordemos que la aplicación

$$\rho^{\tilde{\tau}^*} : \mathcal{T}^E(\oplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\oplus^k E^*) \rightarrow T(\oplus^k E^*)$$

denota el ancla del algebroid  $\mathcal{T}^E(\oplus^k E^*)$ .

*Demostración:*

Es una consecuencia directa de los Lemas 5.7 y 5.42.

□

Los campos de  $k$ -vectores que se obtienen a partir de esta última proposición van a jugar un papel fundamental en la descripción del formalismo hamiltoniano  $k$ -simplético en algebroides de Lie.

Vamos ahora a calcular la expresión local del campo de  $k$ -vectores asociado a una sección  $\xi$ .

Sea  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  una sección de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\oplus^k E^*)$ . El Lema 5.42 nos permite afirmar que cada  $\xi_A : \oplus^k E^* \rightarrow \mathcal{T}^E(\oplus^k E^*)$  es una sección de  $\tilde{\tau}_{\oplus E^*}^k$ .

Sea ahora  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_A^\alpha\}$  una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_{\oplus E^*}^k : \mathcal{T}^E(\oplus^k E^*) \rightarrow \oplus^k E^*$ . Entonces cada  $\xi_A$  se escribe localmente en esta base como sigue:

$$\xi_A = \xi_A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + (\xi_A)_\alpha^B \mathcal{V}_B^\alpha \in \text{Sec}(\mathcal{T}^E(\oplus^k E^*)), \quad 1 \leq A \leq k.$$

De (5.61) obtenemos que el campo de vectores en  $\bigoplus^k E^*$  asociado a  $\xi_A$  tiene la siguiente expresión local:

$$\rho^{\tilde{\tau}^*}(\xi_A) = \rho_\alpha^i \xi_A^\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + (\xi_A)_\alpha^B \frac{\partial}{\partial y_\alpha^B} \in \mathfrak{X}(\bigoplus^k E^*), \quad 1 \leq A \leq k. \quad (5.65)$$

D. Las secciones de Liouville

A continuación vamos a introducir  $k$  secciones del fibrado vectorial

$$(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*))^* \rightarrow \bigoplus^k E^*,$$

dual del fibrado prolongación que estamos considerando en este apartado. Estas secciones nos permitirán describir las ecuaciones de Hamilton en el contexto que nos proporcionan los algebroides de Lie.

**Definición 5.44** *Se llaman **secciones de Liouville** a las secciones del fibrado vectorial  $(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*))^* \rightarrow \bigoplus^k E^*$  definidas por:*

$$\begin{aligned} \Theta^A : \bigoplus^k E^* &\longrightarrow (\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*))^* \\ \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^* &\longmapsto \Theta_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*}^A \end{aligned} \quad 1 \leq A \leq k,$$

en donde  $\Theta_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*}^A$  es la función definida como sigue:

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*}^A : (\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*))_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*} &\equiv E_{\mathbf{q}} \times_{TQ} T_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*}(\bigoplus^k E^*) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*}) &\longmapsto \Theta_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*}^A(a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*}) = b_{A\mathbf{q}}^*(a_{\mathbf{q}}), \end{aligned} \quad (5.66)$$

para cada  $a_{\mathbf{q}} \in E$ ,  $\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^* = (b_{1\mathbf{q}}^*, \dots, b_{k\mathbf{q}}^*) \in \bigoplus^k E^*$  y  $v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*} \in T_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*}(\bigoplus^k E^*)$ .

A partir de las 1-secciones  $\Theta^1, \dots, \Theta^k$  se definen las 2-secciones

$$\Omega^A : \bigoplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*))^* \wedge (\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*))^*, \quad 1 \leq A \leq k$$

por

$$\Omega^A = -d\Theta^A,$$

donde  $d$  denota la diferencial exterior  $d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)}$  en el algebroide de Lie  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$ , véase (5.63).

Reescribiendo el apartado (2) de la Definición 5.2 de la diferencial exterior de un algebroide de Lie para el algebroide  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned}\Omega_L^A(\xi_1, \xi_2) &= -d\Theta^A(\xi_1, \xi_2) \\ &= [\rho^{\tilde{\tau}^*}(\xi_2)](\Theta^A(\xi_1)) - [\rho^{\tilde{\tau}^*}(\xi_1)](\Theta^A(\xi_2)) + \Theta^A([\xi_1, \xi_2]^{\tilde{\tau}^*}),\end{aligned}\quad (5.67)$$

para todo par  $\xi_1, \xi_2 \in \text{Sec}(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*))$  donde  $(\rho^{\tilde{\tau}^*}, [\cdot, \cdot]^{\tilde{\tau}^*})$  denota la estructura de algebroide de Lie de  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$ .

A continuación escribimos las expresiones locales de las secciones  $\Theta^A$  y  $\Omega^A$ .

Consideremos

$$\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_B^\beta\}$$

una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_k : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \rightarrow \bigoplus^k E^*$  y

$$\{\mathcal{X}_\alpha^\alpha, \mathcal{V}_\beta^B\}$$

su base dual. Entonces de la definición (5.60) de los elementos de la base local  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_B^\beta\}$  y de la definición de  $\Theta^A$  se obtiene

$$\begin{aligned}\Theta_{b_q^*}^A(\mathcal{X}_\alpha(b_q^*)) &= \Theta_{b_q^*}^A(e_\alpha(\mathbf{q}), \rho_\alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{b_q^*}) = \left( y_\beta^A(b_q^*) e^\beta(\mathbf{q}) \right) (e_\alpha(\mathbf{q})) = y_\alpha^A(b_q^*) \\ \Theta_{b_q^*}^A(\mathcal{V}_B^\alpha(b_q^*)) &= \Theta_{b_q^*}^A(0_{\mathbf{q}}, \frac{\partial}{\partial y_\alpha^B} \Big|_{b_q^*}) = \left( y_\beta^A(b_q^*) e^\beta(\mathbf{q}) \right) (0_{\mathbf{q}}) = 0,\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\Theta^A = \sum_{\beta=1}^m y_\beta^A \mathcal{X}^\beta, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (5.68)$$

Así de las expresiones (5.61), (5.62), (5.63) y (5.68) correspondientes a la expresión de  $d = d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)}$ , los campos de vectores asociados a una base local de secciones, el corchete de secciones y la expresión local de  $\Theta^A$  se obtiene la expresión local de  $\Omega^A$ , esto es,

$$\Omega^A = \sum_{\beta} \mathcal{X}^\beta \wedge \mathcal{V}_\beta^A + \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma, \delta} \mathcal{C}_{\beta\gamma}^\delta y_\delta^A \mathcal{X}^\beta \wedge \mathcal{X}^\gamma, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (5.69)$$



**Observación 5.45**

- (1) Si reescribimos las definiciones anteriores en el caso particular  $k = 1$  obtenemos las secciones de Liouville de la Mecánica hamiltoniana en algebroides de Lie. Véase los trabajos de E. Martinez, por ejemplo, [24, 96].
- (2) Si consideramos el caso particular  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$ , entonces

$$\Omega^A(X, Y) = \omega^A(X, Y), \quad 1 \leq A \leq k$$

donde  $X, Y$  son campos de vectores en  $(T_k^1)^*Q$  y  $\omega^1, \dots, \omega^k$  denotan las 2-formas canónicas del formalismo  $k$ -simpléctico estándar, (que han sido definidas en (1.31)).

**5.4.2. Formalismo hamiltoniano.**

En esta subsección desarrollaremos el formalismo hamiltoniano  $k$ -simpléctico en algebroides de Lie y veremos que la Mecánica hamiltoniana en algebroides de Lie y el formalismo hamiltoniano estándar son casos particulares del aquí desarrollado.

**A. Ecuaciones de Hamilton en algebroides de Lie.**

Una función  $H: \bigoplus^k E^* \rightarrow \mathbb{R}$  la denominamos **función hamiltoniana** o hamiltoniano.

El siguiente teorema es la versión, en algebroides de Lie, del Teorema 1.23, que resume la formulación hamiltoniana  $k$ -simpléctica estándar.

**Teorema 5.46** Sea  $H: \bigoplus^k E^* \rightarrow \mathbb{R}$  un hamiltoniano y

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \bigoplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E^*)$$

una sección de  $\tilde{\tau}_{\bigoplus^k E^*}^k$  tal que

$$\sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \Omega^A = dH, \quad (5.70)$$

donde, recordemos que  $d = d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)}$

Si  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E^*$  es una sección integral de  $\xi$ , entonces  $\psi$  es una solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} = \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^A} \quad y \quad \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_\alpha^A}{\partial t^A} = - \left( \mathfrak{C}_{\alpha\beta}^\delta \psi_\delta^A \frac{\partial H}{\partial y_\beta^A} + \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial q^i} \right). \quad (5.71)$$

A estas ecuaciones las denominamos **ecuaciones de Hamilton en algebroides de Lie**.

*Demostración:*

Sea

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \bigoplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E^*)$$

una sección de  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E^*}^k$  que verifica (5.70), entonces cada

$$\xi_A : \bigoplus^k E^* \rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$$

es una sección de  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E^*}^k : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \rightarrow \bigoplus^k E$ .

Consideremos  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_B^\beta\}$ , una base local de secciones del fibrado prolongación  $\tilde{\tau}_{\bigoplus E^*}^k : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \rightarrow \bigoplus^k E^*$ , entonces cada  $\xi_A$ ,  $A = 1, \dots, k$  se puede escribir localmente como sigue:

$$\xi_A = \xi_A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + (\xi_A)_\alpha^B \mathcal{V}_B^\alpha, \quad (5.72)$$

A partir de las expresiones locales (5.63), (5.69) y (5.72) de  $df$ ,  $\Omega^A$  y  $\xi_A$  se obtiene

$$\begin{aligned} dH &= \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial q^i} \mathcal{X}^\alpha + \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^B} \mathcal{V}_\alpha^B \\ \sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \Omega^A &= \left( \mathfrak{C}_{\beta\alpha}^\delta y_\delta^A \xi_A^\beta - \sum_{A=1}^k (\xi_A)_\alpha^A \right) \mathcal{X}^\alpha + \xi_A^\alpha \mathcal{V}_\alpha^A, \end{aligned}$$

y por tanto, el sistema de ecuaciones (5.70) es equivalente al siguiente

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\beta\alpha}^\delta y_\delta^A \xi_A^\beta - \sum_{A=1}^k (\xi_A)_\alpha^A &= \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial q^i} \\ \xi_A^\alpha &= \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^A}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}\xi_B^\alpha &= \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^B} \\ \sum_{A=1}^k (\xi_A)_\alpha^A &= - \left( \mathfrak{C}_{\alpha\beta}^\delta y_\delta^C \frac{\partial H}{\partial y_\beta^C} + \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial q^i} \right)\end{aligned}\tag{5.73}$$

Sea ahora  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E^*$ ,  $\psi(\mathbf{t}) = (\psi^i(\mathbf{t}), \psi_\alpha^A(\mathbf{t}))$  una sección integral de  $\xi$ , esto es,  $\psi$  es una sección integral del campo de  $k$ -vectores en  $\bigoplus^k E^*$  asociado a  $\xi$  y dado por

$$(\rho^{\tilde{\tau}^*}(\xi_1), \dots, \rho^{\tilde{\tau}^*}(\xi_1)) \in \mathfrak{X}^k(\bigoplus^k E^*),$$

en donde

$$\rho^{\tilde{\tau}^*} : \text{Sec}(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)) \rightarrow \mathfrak{X}(\bigoplus^k E^*)$$

es el ancla del algebroide  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$ .

Entonces, por ser  $\psi$  sección integral de  $(\rho^{\tilde{\tau}^*}(\xi_1), \dots, \rho^{\tilde{\tau}^*}(\xi_1))$  se verifican las siguientes ecuaciones

$$\xi_A^\beta \rho_\beta^i = \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A}, \quad (\xi_A)_\beta^B = \frac{\partial \psi_\beta^B}{\partial t^A}.\tag{5.74}$$

Para finalizar, de (5.73) y (5.74) se obtiene que  $\psi$  satisface el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^A} \rho_\alpha^i \quad \text{y} \quad \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_\alpha^A}{\partial t^A} = - \left( \mathfrak{C}_{\alpha\beta}^\delta \psi_\delta^A \frac{\partial H}{\partial y_\beta^A} + \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial q^i} \right).$$

□

#### Observación 5.47

- (1) Cuando  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  se obtienen las ecuaciones de Hamilton del formalismo  $k$ -simpléctico hamiltoniano estándar descrito en el capítulo 1 de esta memoria. Esta observación será explicada con mayor detalle en el siguiente apartado.
- (2) En el caso particular  $k = 1$ , reobtenemos la Mecánica hamiltoniana Autónoma en algebroide de Lie, véase sección 3.2 en [24] o sección 3.3 en [72].

B. Caso particular: Formalismo  $k$ -simpléctico hamiltoniano estándar

En este apartado vamos a explicar con más detalle el punto 1 de la observación 5.47.

- La variedad  $\bigoplus^k E^*$  se identifica con  $(T_k^1)^*Q$ ,  $\mathcal{T}^{TQ}((T_k^1)^*Q)$  con  $T((T_k^1)^*Q)$  y  $(\mathcal{T}^{TQ})_k^1((T_k^1)^*Q)$  con  $T_k^1((T_k^1)^*Q)$ .

- Una sección

$$\xi : \bigoplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E^*)$$

se corresponde con un campo de  $k$ -vectores  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  en  $(T_k^1)^*Q$ , esto es,  $\xi$  es una sección de  $\tau_{(T_k^1)^*Q}^k : T_k^1((T_k^1)^*Q) \rightarrow (T_k^1)^*Q$ .

- Sea  $f$  una función en  $(T_k^1)^*Q$  entonces

$$(d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)} f)(Y) = df(Y)$$

donde  $df$  denota la diferencial usual e  $Y$  es un campo de vectores en  $(T_k^1)^*Q$ .

- Se verifica que

$$\Omega^A(X, Y) = \omega^A(X, Y) \quad (A = 1, \dots, k)$$

donde  $\omega^A$  es la 2-forma canónica del formalismo hamiltoniano  $k$ -simpléctico estándar definida en (1.2).

- Así, en el formalismo  $k$ -simpléctico estándar la ecuación (5.70) se escribe como sigue:

$$\sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \omega^A = dH .$$

En consecuencia del Teorema 5.46 y los cinco comentarios anteriores, reobtenemos la formulación hamiltoniana  $k$ -simpléctica estándar (véase Sección 1.1.3).

**Corolario 5.48** *Sea  $H : (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función hamiltoniana y  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  un campo de  $k$ -vectores en  $(T_k^1)^*Q$  tal que*

$$\sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \omega^A = dH .$$

Si  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^*Q$  es una sección integral del campo de  $k$ -vectores  $\xi$ , entonces es una solución de las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl (1.13) del formalismo  $k$ -simpléctico hamiltoniano estándar.

La relación entre los elementos geométricos del formalismo  $k$ -simpléctico hamiltoniano estándar y en algebroides de Lie, que hemos descrito anteriormente se recoge de un modo esquemático a continuación:

■ Funciones hamiltonianas.

- Algebroides de Lie:

$$H : \bigoplus^k E^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

- Estándar:

$$H : (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}.$$

■ Secciones de Liouville.

- Algebroides de Lie:

$$\Omega^A : \bigoplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*))^* \wedge (\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*))^*, \quad A = 1, \dots, k.$$

- Estándar:

$$\omega^A : (T_k^1)^*Q \rightarrow T^*((T_k^1)^*Q) \wedge T^*((T_k^1)^*Q), \quad A = 1, \dots, k.$$

■ Ecuaciones algebraicas.

- Algebroides de Lie:

$$\sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \Omega^A = dH,$$

donde

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \bigoplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E^*)$$

es una sección del fibrado  $k$ -prolongación  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E^*)$ .

- Estándar:

$$\sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \omega^A = dH ,$$

siendo

$$(\xi_1 \dots, \xi_k) : (T_k^1)^*Q \rightarrow T_k^1((T_k^1)^*Q)$$

es un campo de  $k$ -vectores en  $(T_k^1)^*Q$ .

- Ecuaciones de campo.

- Algebroides de Lie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} &= \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \\ \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_\alpha^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} &= - \left( \mathfrak{C}_{\alpha\beta}^\delta \psi_\delta^C(\mathbf{t}) \frac{\partial H}{\partial y_\beta^C} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} + \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) . \end{aligned}$$

Las soluciones de estas ecuaciones son aplicaciones

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^k &\rightarrow \bigoplus^k E^* \\ \mathbf{t} &\mapsto \psi(\mathbf{t}) = (\psi^i(\mathbf{t}), \psi_\alpha^A(\mathbf{t})) \end{aligned}$$

- Estándar:

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = - \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} , \quad \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} .$$

Las soluciones de estas ecuaciones son aplicaciones

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^k &\rightarrow (T_k^1)^*Q \\ \mathbf{t} &\mapsto \psi(\mathbf{t}) = (\psi^i(\mathbf{t}), \psi_i^A(\mathbf{t})) \end{aligned}$$

## 5.5. Equivalencia entre el formalismo lagrangiano y el hamiltoniano.

En la sección 1.3 del capítulo 1 recordamos que las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana  $k$ -simplética son equivalentes cuando el lagrangiano  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  es hiperregular.

En el contexto que nos proporcionan los algebroides de Lie se obtiene un resultado similar que desarrollaremos en esta sección. Para ello comenzamos introduciendo la transformación de Legendre en este contexto.

Sea  $L : \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}$  una función lagrangiana y  $\Theta_L^A : \bigoplus^k E \rightarrow [\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)]^*$ , ( $A = 1, \dots, k$ ) las 1-secciones lagrangianas asociadas a  $L$  que hemos definido en (5.41).

**Definición 5.49** *Llamamos transformación de Legendre asociada a  $L$  a la aplicación diferenciable*

$$\mathfrak{Leg} : \bigoplus^k E \rightarrow \bigoplus^k E^*$$

*definida por*

$$\mathfrak{Leg}(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) = \left( [\mathfrak{Leg}(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}})]^1, \dots, [\mathfrak{Leg}(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}})]^k \right)$$

*donde*

$$[\mathfrak{Leg}(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}})]^A(u_{\mathbf{q}}) = \frac{d}{ds} L(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{A\mathbf{q}} + su_{\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) \Big|_{s=0},$$

*siendo  $u_{\mathbf{q}} \in E_{\mathbf{q}}$ .*

En otras palabras para cada  $A$  podemos escribir

$$[\mathfrak{Leg}(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}})]^A(u_{\mathbf{q}}) = \Theta_L^A(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}})(Z), \quad (5.75)$$

donde  $Z$  es un punto en la fibra  $(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E))_{\mathbf{a}_{\mathbf{q}}}$ , siendo

$$\mathbf{a}_{\mathbf{q}} = (a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) \in \bigoplus^k E$$

y además se verifica que

$$\tilde{\tau}_1(Z) = u_{\mathbf{q}}$$

donde

$$\tilde{\tau}_1 : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) = E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E) \rightarrow E$$

es la proyección sobre el primer factor, esto es,  $Z$  es de la forma  $Z = (u_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{a}_{\mathbf{q}}})$ .

La expresión local de la aplicación  $\mathfrak{Leg}$  es

$$\mathfrak{Leg}(q^i, y_A^\alpha) = (q^i, \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha}).$$

A partir de la expresión local anterior es sencillo probar que el lagrangiano  $L$  es regular si, y sólo si,  $\mathfrak{Leg}$  es un difeomorfismo local.

**Observación 5.50** Cuando se considera el algebroide de Lie  $E = TQ$  la transformación de Legendre aquí definida coincide con la transformation de Legendre introducida por Günther en [56].

◇

La transformación de Legendre,  $\mathcal{L}eg$ , induce una aplicación

$$\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg : \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E) \rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E^*)$$

definida como sigue:

$$\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg(a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) = \left( a_{\mathbf{q}}, (\mathcal{L}eg)_*(\mathbf{b}_{\mathbf{q}})(v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) \right),$$

donde  $a_{\mathbf{q}} \in E_{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{b}_{\mathbf{q}} \in \bigoplus^k E$  y  $(a_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{b}_{\mathbf{q}}}) \in \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E)$ . Nótese que el siguiente diagrama es commutativo

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus^k E & \xrightarrow{\mathcal{L}eg} & \bigoplus^k E^* \\ & \searrow \tilde{\tau} & \swarrow \tilde{\tau}^* \\ & Q & \end{array}$$

y así  $\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg$  está bien definida.

La expresión local de  $\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg$  respecto a las coordenadas locales de  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$  y  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$ , (véase (5.23) y (5.59)), es la siguiente:

$$\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg(q^i, y_A^\alpha, z^\alpha, w_B^\beta) = \left( q^i, \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha}, z^\alpha, z^\alpha \rho_\alpha^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_C^\gamma} + w_B^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial y_C^\gamma \partial y_B^\beta} \right). \quad (5.76)$$

**Teorema 5.51** *El par  $(\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)$  es un morfismo entre los algebroides de Lie  $(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E), \rho^{\tilde{\tau}}, [\cdot, \cdot]^{\tilde{\tau}})$  y  $(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*), \rho^{\tilde{\tau}^*}, [\cdot, \cdot]^{\tilde{\tau}^*})$ . Además si  $\Theta_L^A$  y  $\Omega_L^A$  (respectivamente,  $\Theta^A$  y  $\Omega^A$ ) son las secciones de Poincaré-Cartan asociadas a una función lagrangiana  $L: \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}$  (respectivamente, las secciones de Liouville en  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$ ), entonces*

$$(\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^* \Theta^A = \Theta_L^A, \quad (\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^* \Omega^A = \Omega_L^A, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (5.77)$$



*Demostración:*

En primer lugar tenemos que demostrar que  $(\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)$  es un morfismo de algebroides de Lie.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) & \xrightarrow{\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg} & \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \\ \tilde{\tau}_{\bigoplus^k E} \downarrow & & \downarrow \tilde{\tau}_{\bigoplus^k E^*} \\ \bigoplus^k E & \xrightarrow{\mathcal{L}eg} & \bigoplus^k E^* \end{array}$$

Sea  $(q^i)$  un sistema local de coordenadas en  $Q$ ,  $\{e_\alpha\}$  una base local de secciones de  $\tau: E \rightarrow Q$  y denotemos por  $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}$  (respectivamente por  $\{\mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{U}_A^\alpha\}$ ) la correspondiente base local de secciones de  $\tilde{\tau}_{\bigoplus^k E}: \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) \rightarrow \bigoplus^k E$  (respectivamente,  $\tilde{\tau}_{\bigoplus^k E^*}: \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \rightarrow \bigoplus^k E^*$ ).

Entonces usando (5.6), (5.27) y (5.76), mediante un cálculo directo, deducimos que

$$(\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^*(\mathcal{Y}^\alpha) = \mathcal{X}^\alpha \quad , \quad (\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^*(\mathcal{U}_\alpha^A) = d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)} \left( \frac{\partial L}{\partial y_\alpha^A} \right) , \quad (5.78)$$

para cada  $\alpha = 1, \dots, m$  y cada  $A = 1, \dots, k$  donde  $\{\mathcal{X}^\alpha, \mathcal{V}_A^\alpha\}$  y  $\{\mathcal{Y}^\alpha, \mathcal{U}_\alpha^A\}$  denotan las bases duales de las bases de secciones de  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$  y  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$  respectivamente.

Así, teniendo en cuenta estas identidades, de (5.27) y (5.63) concluimos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^*(d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)} f) &= d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)}(f \circ \mathcal{L}eg) \\ (\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^*(d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)} \mathcal{Y}^\alpha) &= d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)}((\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^* \mathcal{Y}^\alpha) \\ (\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^*(d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)} \mathcal{U}_\alpha^A) &= d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)}((\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^* \mathcal{U}_\alpha^A) , \end{aligned}$$

para toda función  $f \in \mathcal{C}^\infty(\bigoplus^k E^*)$  y para todo  $\alpha$  y  $A$ .

Como consecuencia de estas relaciones se verifica que el par  $(\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)$  es un morfismo de algebroides de Lie.

Veamos ahora que se verifica  $(\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^* \Theta^A = \Theta_L^A$ .

De (5.6), (5.66) y (5.75) obtenemos:

$$\begin{aligned} [(\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^* \Theta^A]_{b_q}(u_q, v_{b_q}) &= \Theta_{\mathcal{L}eg(b_q)}^A(u_q, (\mathcal{L}eg)_*(b_q)(v_{b_q})) \\ &= [\mathcal{L}eg(b_q)]^A(u_q) = \Theta_L^A(b_q)(u_q, v_{b_q}). \end{aligned}$$

Por último, por ser  $(\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)$  un morfismo de algebroides de Lie y teniendo en cuenta la identidad que acabamos de demostrar se verifica:

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^* \Omega^A &= -(\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^*(d^{\mathcal{T}^E(\oplus^k E^*)} \Theta^A) \\ &= -d^{\mathcal{T}^E(\oplus^k E)}((\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg, \mathcal{L}eg)^* \Theta^A) \\ &= -d^{\mathcal{T}^E(\oplus^k E)} \Theta_L^A = \Omega_L^A. \end{aligned}$$

□

**Observación 5.52** En el caso particular  $k = 1$  este teorema se corresponde con el teorema 3.12 de [72].

En el caso  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  la afirmación de este teorema se corresponde con la relación entre las formas lagrangianas y hamiltonianas del formalismo  $k$ -simpléctico estándar, véase el capítulo 1 de esta memoria.

◇

Si la transformación de Legendre  $\mathcal{L}eg$  es un difeomorfismo global diremos que el lagrangiano es hiperregular. En este caso ambos formalismos, el lagrangiano y el hamiltoniano, son equivalentes.

Cuando el lagrangiano  $L$  es hiperregular, existe un hamiltoniano  $H$  definido por

$$H = E_L \circ (\mathcal{L}eg)^{-1},$$

donde  $E_L$  es la función energía asociada a  $L$  definida en (5.46) y  $(\mathcal{L}eg)^{-1}$  es la inversa de la transformación de Legendre.

$$\begin{array}{ccc} \oplus^k E^* & \xrightarrow{\mathcal{L}eg^{-1}} & \oplus^k E \\ & \searrow H & \downarrow E_L \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

**Lema 5.53** *Si el lagrangiano  $L$  es hiperregular, entonces  $\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg$  es un difeomorfismo.*

*Demostración:*

La condición de que  $L$  sea hiperregular significa que  $\mathcal{L}eg$  es un difeomorfismo global, entonces existe su inversa

$$\mathcal{L}eg^{-1}: \bigoplus^k E^* \rightarrow \bigoplus^k E.$$

Definimos la inversa de  $\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg$  como la aplicación

$$(\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg)^{-1}: \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \rightarrow \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$$

que verifica

$$(\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg)^{-1}(a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}^*}) = \left( a_{\mathbf{q}}, (\mathcal{L}eg^{-1})_*(b_{\mathbf{q}}^*)(v_{b_{\mathbf{q}}^*}) \right),$$

siendo  $a_{\mathbf{q}} \in E$ ,  $b_{\mathbf{q}}^* \in \bigoplus^k E^*$  y  $(a_{\mathbf{q}}, v_{b_{\mathbf{q}}^*}) \in \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\bigoplus^k E^*)$ .

Ahora, es sencillo comprobar que  $\mathcal{T}^E \mathcal{L}eg$  es un difeomorfismo.

□

El siguiente teorema establece la equivalencia entre la formulación lagrangiana y hamiltoniana  $k$ -simplética en algebroides de Lie.

**Teorema 5.54** *Sea  $L$  un lagrangiano hiperregular. Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de aplicaciones  $\eta: \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E$  tales que  $\eta$  es una sección integral de una sección solución  $\xi_L$  de las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.52) y el conjunto de aplicaciones  $\psi: \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E^*$  que son secciones integrales de alguna solución  $\xi_H$  de las ecuaciones hamiltonianas (5.70).*

*Demostración:*

Sea  $\xi_L = (\xi_L^1, \dots, \xi_L^k): \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\bigoplus^k E)$  una solución de las ecuaciones geométricas de Euler-Lagrange en algebroides de Lie (5.52), entonces  $\xi_H = (\xi_H^1, \dots, \xi_H^k)$  donde cada

$$\xi_H^A = \mathcal{T}^E \mathcal{L}eg \circ \xi_L^A \circ (\mathcal{L}eg)^{-1}$$

es una solución de (5.70).

En efecto, si  $b_q^* \in \bigoplus^k E^*$  y  $Y_{b_q^*} \in \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$  entonces se verifica

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{A=1}^k \iota_{\xi_H^A} \Omega^A - d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)} H \right)_{b_q^*} (Y_{b_q^*}) \\
&= \sum_{A=1}^k \Omega_{b_q^*}^A (\xi_H^A(b_q^*), Y_{b_q^*}) - \left( d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)} [(\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1})^* E_L] \right)_{b_q^*} (Y_{b_q^*}) \\
&= \sum_{A=1}^k \Omega_{\mathcal{L} \mathbf{eg}(\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1}(b_q^*))}^A ((\mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg} \circ \xi_L^A \circ \mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1})(b_q^*), Y_{b_q^*}) \\
&\quad - \left( d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)} [(\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1})^* E_L] \right)_{b_q^*} (Y_{b_q^*}) \\
&= \sum_{A=1}^k \Omega_{\mathcal{L} \mathbf{eg}(\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1}(b_q^*))}^A ((\mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg} \circ \xi_L^A \circ \mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1})(b_q^*), \mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg} \circ (\mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg})^{-1}(Y_{b_q^*})) \\
&\quad - \left( d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)} [(\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1})^* E_L] \right)_{\mathcal{L} \mathbf{eg}(\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1}(b_q^*))} (\mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg} \circ (\mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg})^{-1}(Y_{b_q^*})) \\
&= \sum_{A=1}^k [(\mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg}, \mathcal{L} \mathbf{eg})^* \Omega^A]_{\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1}(b_q^*)} (\xi_L^A(\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1}(b_q^*)), (\mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg})^{-1}(Y_{b_q^*})) \\
&\quad - (\mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg}, \mathcal{L} \mathbf{eg})^* \left[ d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)} [(\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1})^* E_L] \right]_{\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1}(b_q^*)} ((\mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg})^{-1}(Y_{b_q^*})) \\
&= \sum_{A=1}^k (\Omega_L^A)_{\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1}(b_q^*)} (\xi_L^A(\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1}(b_q^*)), (\mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg})^{-1}(Y_{b_q^*})) \\
&\quad - d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)} [(\mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg}, \mathcal{L} \mathbf{eg})^* [(\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1})^* E_L]]_{\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1}(b_q^*)} ((\mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg})^{-1}(Y_{b_q^*})) \\
&= \left( \sum_{A=1}^k \iota_{\xi_L^A} \Omega_L^A - d^{\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)} E_L \right)_{\mathcal{L} \mathbf{eg}^{-1}(b_q^*)} ((\mathcal{T}^E \mathcal{L} \mathbf{eg})^{-1}(Y_{b_q^*})) = 0,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Teorema 5.51 y el Lema 5.53.

Por lo tanto  $\xi_H$  es una solución de las ecuaciones geométricas de Hamilton en algebroides de Lie, (5.70).

Además, si  $\eta : \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E$  es una sección integral de  $\xi_L = (\xi_L^1, \dots, \xi_L^k)$ , entonces

$$\mathfrak{Leg} \circ \eta : \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E^*$$

es una sección integral de  $\xi_H = (\xi_H^1, \dots, \xi_H^k)$  siendo

$$\xi_H^A = \mathcal{T}^E \mathfrak{Leg} \circ \xi_L^A \circ (\mathfrak{Leg})^{-1}.$$

Vamos a probar ahora esta afirmación, para ello debemos comprobar que

$$\rho^{\tilde{\tau}*}(\xi_H^A)(\mathfrak{Leg} \circ \eta(\mathbf{t})) = (\mathfrak{Leg} \circ \eta)_*(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right), \quad 1 \leq A \leq k,$$

donde  $\rho^{\tilde{\tau}*} : \text{Sec}(\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)) \rightarrow \mathfrak{X}(\bigoplus^k E^*)$  es el ancla del algebroid  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$ .

Se verifica

$$\begin{aligned} \rho^{\tilde{\tau}*}(\xi_H^A)(\mathfrak{Leg} \circ \eta(\mathbf{t})) &= \rho^{\tilde{\tau}*}(\mathcal{T}^E \mathfrak{Leg} \circ \xi_L^A \circ (\mathfrak{Leg})^{-1})(\mathfrak{Leg} \circ \eta(\mathbf{t})) \\ &= (T(\mathfrak{Leg}) \circ \rho^{\tilde{\tau}} \circ \xi_L^A \circ (\mathfrak{Leg})^{-1})(\mathfrak{Leg} \circ \eta(\mathbf{t})) = T(\mathfrak{Leg}) \circ \rho^{\tilde{\tau}}(\xi_L^A) \circ \eta(\mathbf{t}) \\ &= T(\mathfrak{Leg}) \left( \eta_*(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \right) = (\mathfrak{Leg} \circ \eta)_*(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \end{aligned}$$

en donde estamos utilizando la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E) & \xrightleftharpoons[\mathcal{T}^E \mathfrak{Leg}]{(\mathcal{T}^E \mathfrak{Leg})^{-1}} & \mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*) & & \\ \uparrow \xi_L^A & \searrow \rho^{\tilde{\tau}} & \uparrow \tilde{\tau}_{\bigoplus^k E^*} & \searrow \rho^{\tilde{\tau}*} & \\ & T(\bigoplus^k E) & \xrightleftharpoons[\mathcal{T} \mathfrak{Leg}]{T \mathfrak{Leg}} & T(\bigoplus^k E^*) & \\ & \swarrow \tau_{\bigoplus^k E} & \downarrow \xi_H^A & \swarrow \tau_{\bigoplus^k E^*} & \\ \bigoplus^k E & \xrightleftharpoons[\mathfrak{Leg}]{\mathfrak{Leg}^{-1}} & \bigoplus^k E^* & & \end{array}$$

De un modo similar al que se acaba de comentar se prueba que si  $\xi_H = (\xi_H^1, \dots, \xi_H^k)$  es solución de las ecuaciones geométricas de Hamilton (5.70), entonces  $\xi_L = (\xi_L^1, \dots, \xi_L^k)$  donde

$$\xi_L^A = (\mathcal{T}^E \mathfrak{Leg})^{-1} \circ \xi_H^A \circ \mathfrak{Leg}$$

es solución de las ecuaciones geométricas de Euler-Lagrange (5.52) y de este modo que si  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E^*$  es una sección integral de  $\xi_H$  entonces  $\mathfrak{Leg}^{-1} \circ \psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E$  es una sección integral de  $\xi_L$  y por tanto solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

□

**Observación 5.55** Si reescribimos los resultados de esta sección en el caso particular  $k = 1$  reobtenemos la equivalencia entre la Mecánica lagrangiana y la hamiltoniana Autónoma en algebroides de Lie, véase por ejemplo [24].

En el caso particular  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$ , obtenemos la equivalencia entre la formulación  $k$ -simpléctica lagrangiana y hamiltoniana estándar, véase la Sección 1.3.

◇

## Parte II

# Teoría k-cosimpléctica





## Capítulo 6

# Formulación $k$ -cosimpléctica de las Teorías Clásicas de Campos

En la segunda parte de esta memoria estudiaremos como aplicar las variedades  $k$ -cosimplécticas al estudio de las teorías clásicas de campos de primer orden, tanto en el enfoque lagrangiano como en el hamiltoniano. De este modo generalizaremos ciertos resultados del enfoque cosimpléctico en el estudio de la mecánica dependiente del tiempo.

La finalidad de este capítulo es introducir los conceptos y elementos básicos de la formulación lagrangiana y hamiltoniana  $k$ -cosimpléctica.

Los contenidos de este capítulo se encuentran, en su mayor parte, en los trabajos de M. de León *et al.* [83, 84].

Además, aquí hemos desarrollado dos principios variacionales de los que se obtienen, respectivamente, las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange y de Hamilton-De Donder-Weyl.

### 6.1. El enfoque hamiltoniano.

En esta sección revisaremos los principales elementos y resultados de la formulación hamiltoniana  $k$ -cosimpléctica de las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl. Véase M. de León [83].

### 6.1.1. Fundamentos geométricos.

A continuación vamos a describir la variedad  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ , sobre la que se desarrolla la formulación hamiltoniana  $k$ -cosimpléctica. Dotaremos a esta variedad de una estructura  $k$ -cosimpléctica, véase M. de León [83].

#### A. La variedad $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ .

Sea  $Q$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . En este apartado vamos a considerar la variedad  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ , donde  $(T_k^1)^*Q$  denota el fibrado de las  $k^1$ -covelocidades que hemos explicado en la sección 1.1.1.A.

Así un elemento de  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  es una familia

$$(\mathbf{t}, \alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}})$$

formada por un elemento  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$  y  $k$  covectores  $\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}$  sobre el mismo punto base  $\mathbf{q}$  de  $Q$ .

En el siguiente diagrama conmutativo se recoge la notación que emplearemos para referirnos a algunas de las proyecciones canónicas que utilizaremos a lo largo de esta segunda parte de la memoria.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q & \xrightarrow{(\hat{\pi}_Q)_{1,0}} & \mathbb{R}^k \times Q & \xrightarrow{\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}} & \mathbb{R}^k \\ & \searrow (\hat{\pi}_Q)_1 & \downarrow \hat{\pi}_Q & & \\ & & Q & & \end{array}$$

Estas proyecciones están definidas como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_Q(\mathbf{t}, \mathbf{q}) &= \mathbf{q} \quad , \quad (\hat{\pi}_Q)_{1,0}(\mathbf{t}, \alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) = (\mathbf{t}, \mathbf{q}), \\ \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}(\mathbf{t}, \mathbf{q}) &= \mathbf{t} \quad , \quad (\hat{\pi}_Q)_1(\mathbf{t}, \alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) = \mathbf{q}, \end{aligned}$$

con  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{q} \in Q$  y  $(\alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) \in (T_k^1)^*Q$ .

La variedad  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  es difeomorfa a la variedad  $J^1\hat{\pi}_Q$  de 1-jets de secciones  $\sigma = (\sigma_{\mathbb{R}^k}, id_Q)$  del fibrado trivial  $\hat{\pi}_Q : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow Q$ , por medio del difeomorfismo dado por

$$\begin{aligned} J^1\hat{\pi}_Q &\rightarrow \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \\ j_{\mathbf{q}}^1\sigma &= j_{\mathbf{q}}^1(\sigma_{\mathbb{R}^k}, id_Q) \mapsto (\sigma_{\mathbb{R}^k}(\mathbf{q}), \alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

donde  $\sigma_{\mathbb{R}^k} : Q \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^k \times Q \xrightarrow{\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}} \mathbb{R}^k$ ,  $\alpha_{A\mathbf{q}} = d\sigma_{\mathbb{R}^k}^A(\mathbf{q})$  y  $\sigma_{\mathbb{R}^k}^A : Q \xrightarrow{\sigma_{\mathbb{R}^k}} \mathbb{R}^k \xrightarrow{\hat{\pi}^A} \mathbb{R}$  es la  $A$ -ésima componente de  $\sigma_{\mathbb{R}^k}$ ,  $1 \leq A \leq k$ .

Si  $(q^i)_{1 \leq i \leq n}$  es un sistema de coordenadas locales en  $U \subseteq Q$ , se definen las coordenadas locales inducidas  $(t^A, q^i, p_i^A)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq A \leq k}$  en  $[(\hat{\pi}_Q)_1]^{-1}(U) = \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*U$  como sigue

$$t^A(j_{\mathbf{q}}^1\sigma) = (\sigma_{\mathbb{R}^k}(\mathbf{q}))^A, \quad q^i(j_{\mathbf{q}}^1\sigma) = q^i(\mathbf{q}), \quad p_i^A(j_{\mathbf{q}}^1\sigma) = d\sigma_{\mathbb{R}^k}^A(\mathbf{q})\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\mathbf{q}}\right),$$

o equivalentemente

$$t^A(\mathbf{t}, \alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) = t^A(\mathbf{t}) = t^A; \quad q^i(\mathbf{t}, \alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) = q^i(\mathbf{q});$$

$$p_i^A(\mathbf{t}, \alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) = \alpha_{A\mathbf{q}}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\mathbf{q}}\right).$$

Estas coordenadas se llaman **coordenadas canónicas de  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$** . De esta manera  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión  $k + n(k + 1)$ .

B. Formas canónicas en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ .

En este apartado describiremos ciertos objetos geométricos canónicos en la variedad  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ . Estos objetos serán utilizados en la descripción  $k$ -cosimpléctica hamiltoniana, véase la sección 6.1.2.

Consideramos en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ , las formas diferenciales

$$\eta^A = (\hat{\pi}_1^A)^*dt^A, \quad \theta^A = (\hat{\pi}_2^A)^*\theta, \quad \omega^A = (\hat{\pi}_2^A)^*\omega, \quad 1 \leq A \leq k \quad (6.1)$$

donde  $\omega = -d\theta = dq^i \wedge dp_i$  es la forma simpléctica canónica en  $T^*Q$ ,  $\theta = p_i dq^i$  es la 1-forma de Liouville en  $T^*Q$  y  $\hat{\pi}_1^A$  y  $\hat{\pi}_2^A$  denotan las siguientes proyecciones canónicas:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_1^A: \quad \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{t}, \alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) &\rightarrow t^A \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_2^A: \quad \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q &\rightarrow T^*Q \\ (\mathbf{t}, \alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) &\rightarrow \alpha_{A\mathbf{q}} \end{aligned}$$

Trivialmente se obtiene que  $\omega^A = -d\theta^A$ .

En coordenadas locales se tienen las siguientes expresiones

$$\eta^A = dt^A, \quad \theta^A = \sum_{i=1}^n p_i^A dq^i \quad \omega^A = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i^A, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (6.2)$$

Las formas  $\eta^A$  y  $\omega^A$  son cerradas. Además si consideramos los conjuntos

$$\ker \eta^A := \{X \in T(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) / \eta^A(X) = 0\}$$

y

$$\ker \omega^A := \{X \in T(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) / \iota_X \omega^A = 0\}$$

se comprueba que se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^k \neq 0, \quad (\eta^A)|_V = 0, \quad \omega^A|_{V \times V} = 0, \\ (2) \quad & \left( \bigcap_{A=1}^k \ker \eta^A \right) \cap \left( \bigcap_{A=1}^k \ker \omega^A \right) = \{0\}, \quad \dim \left( \bigcap_{A=1}^k \ker \omega^A \right) = k, \end{aligned}$$

donde  $V = \ker T(\hat{\pi}_Q)_{1,0}$  es la distribución vertical de dimension  $nk$  asociada a  $(\hat{\pi}_Q)_{1,0}$ . Esta distribución se expresa localmente como sigue:

$$V = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_i^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_i^k} \right\rangle_{i=1, \dots, n}$$

### C. Variedades $k$ -cosimplécticas

A partir del modelo geométrico que se acaba de describir M. de León *et al.* introdujeron las variedades  $k$ -cosimplécticas (véase [83, 84]) dando la siguiente definición:

**Definición 6.1** *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $k + n(k + 1)$ . Una familia  $(\eta^A, \omega^A, V; 1 \leq A \leq k)$ , donde cada  $\eta^A$  es una 1-forma cerrada, cada  $\omega^A$  es una 2-forma cerrada y  $V$  es una distribución integrable en  $M$  de dimensión  $nk$ , tal que*

$$(1) \quad \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^k \neq 0, \quad \eta^A|_V = 0, \quad \omega^A|_{V \times V} = 0,$$

$$(2) \quad \left( \bigcap_{A=1}^k \ker \eta^A \right) \cap \left( \bigcap_{A=1}^k \ker \omega^A \right) = \{0\}, \quad \dim \left( \bigcap_{A=1}^k \ker \omega^A \right) = k,$$

se denomina **estructura  $k$ -cosimpléctica**, y la variedad  $M$  **variedad  $k$ -cosimpléctica**.

El modelo canónico de las variedades  $k$ -cosimplécticas es  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  con la estructura  $(\eta^A, \omega^A, V, 1 \leq A \leq k)$  definida en (6.1). Además, para un sistema de coordenadas locales  $(t^A, q^i, p_i^A)_{1 \leq i \leq k, 1 \leq A \leq k}$  las formas diferenciales  $\eta^A, \omega^A$  tienen las expresiones locales dadas en (6.2).

Para una variedad  $k$ -cosimpléctica arbitraria  $M$ , M. de León *et al.* en [83] han demostrado que existen sistemas locales de coordenadas en  $M$  que permiten expresar, localmente, las formas  $\eta^A, \omega^A$  de un modo análogo a (6.2). Esto se recoge en el siguiente teorema:

**Teorema 6.2** (*Teorema de Darboux  $k$ -cosimpléctico*) Si  $(M, \eta^A, \omega^A, V)$  es una variedad  $k$ -cosimpléctica entonces en un entorno de cada punto  $x \in M$  existe un sistema local de coordenadas  $(t^A, x^i, y_i^A; 1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n)$  tal que

$$\eta^A = dt^A, \quad y \quad \omega^A = dx^i \wedge dy_i^A$$

y además

$$V = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_i^k} \right\rangle_{i=1, \dots, n}.$$

Dicho sistema de coordenadas se llama **sistema de coordenadas adaptado**.

Para cualquier estructura  $k$ -cosimpléctica  $(\eta^A, \omega^A, V)$  en  $M$ , existe una familia de  $k$  campos de vectores  $\{R_A, 1 \leq A \leq k\}$  caracterizados por las condiciones siguientes

$$\iota_{R_A} \eta^B = \delta_A^B, \quad \iota_{R_A} \omega^B = 0, \quad 1 \leq A, B \leq k.$$

Estos campos se denominan **campos de vectores de Reeb** asociados a la estructura  $k$ -cosimpléctica. En el modelo canónico  $R_A = \partial/\partial t^A$ ,  $A = 1, \dots, k$ .

### 6.1.2. Formalismo hamiltoniano. Ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl.

A lo largo de esta subsección vamos a repasar la formulación Hamiltonina  $k$ -cosimpléctica de las teorías clásicas de campos de primer orden desarrollado por M. de León *et. al.* en [83].

Comenzaremos la subsección describiendo un caso particular de ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl que se corresponde con las ecuaciones de la electrostática.

A continuación establecemos un principio variacional del que se deducen dichas ecuaciones para finalizar la subsección recordando la descripción geométrica de estas ecuaciones desarrollada en [83].

A. Ejemplo: ecuaciones de la electrostática.

Sobre el espacio  $\mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(t^1, t^2, t^3)$  consideramos una métrica de Riemann  $g$  con componentes  $g_{AB}(\mathbf{t})$ ,  $1 \leq A, B \leq 3$ .

Las ecuaciones locales de la electrostática son (véase [31, 62]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t^A} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{B=1}^3 g_{AB} \psi^B, \\ \sum_{A=1}^3 \frac{\partial \psi^A}{\partial t^A} &= -4\pi \sqrt{g} r, \end{aligned}$$

donde  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es un campo escalar que da el potencial eléctrico sobre  $\mathbb{R}^3$ ,  $P = (\psi^1, \psi^2, \psi^3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es un campo vectorial que establece el campo eléctrico sobre  $\mathbb{R}^3$ ,  $\sqrt{g} = \sqrt{\det g_{AB}}$  y  $r = r(\mathbf{t})$  es la función escalar sobre  $\mathbb{R}^3$  determinada por:

$$p_Q(\mathbf{t}) = \sqrt{g} r(\mathbf{t}) dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3,$$

siendo  $p_Q(\mathbf{t})$  la 3-forma en  $\mathbb{R}^3$  que determina la densidad de carga, y que es un dato conocido.

Supongamos que la métrica  $g$  sobre  $\mathbb{R}^3$  es la métrica euclídea, así las ecuaciones anteriores se escriben como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t^A} &= \psi^A, \\ -\left(\frac{\partial \psi^1}{\partial t^1} + \frac{\partial \psi^2}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi^3}{\partial t^3}\right) &= 4\pi r. \end{aligned}$$

Si definimos la función

$$H(t^1, t^2, t^3, q, p^1, p^2, p^3) = 4\pi r(\mathbf{t})q + \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 (p^A)^2$$

donde  $q$  representa la variable  $\psi$  y  $p^A$  las variables  $\psi^A$  que componen  $P$  entonces

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 4\pi r, \quad \frac{\partial H}{\partial p^A} = p^A.$$

Ahora, evaluando las dos identidades anteriores en

$$\psi(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \psi(\mathbf{t}), \psi^1(\mathbf{t}), \psi^2(\mathbf{t}), \psi^3(\mathbf{t}))$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} &= 4\pi r(\mathbf{t}) = - \sum_{A=1}^3 \frac{\partial \psi^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \\ \frac{\partial H}{\partial p^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} &= \psi^A(\mathbf{t}) = \frac{\partial \psi}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}. \end{aligned}$$

Así las ecuaciones de la electrostática se pueden escribir como sigue

$$\frac{\partial H}{\partial q} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = - \sum_{A=1}^3 \frac{\partial \psi^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, \quad \frac{\partial H}{\partial p^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = \frac{\partial \psi}{\partial t^A}.$$

siendo un ejemplo de las denominadas ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl.

En general, a partir de un principio variacional, que se describirá a continuación, se obtienen las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl clásicas,

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = - \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, \quad 1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n,$$

donde cada solución es una aplicación

$$\psi(t^1, \dots, t^k) = (t^1, \dots, t^k, \psi^i(t^1, \dots, t^k), \psi_i^A(t^1, \dots, t^k))$$

con  $i = 1, \dots, n$  y  $A = 1, \dots, k$  (en el ejemplo anterior  $i = 1$  y  $k = 3$ ) y  $H$  es una función de las variables  $t^A, q^i, p_i^A$ , así podemos considerar que la función hamiltoniana  $H$  está definida en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ .

## B. Principio variacional y ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl.

El desarrollo de esta sección se hará sobre  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ , esto es, el modelo canónico de las variedades  $k$ -cosimplécticas y en ella obtendremos las ecuaciones de Hamilton a partir de un principio variacional. *Teniendo en cuenta el Teorema de Darboux 6.2 puede desarrollarse, de modo análogo, en cualquier variedad  $k$ -cosimpléctica  $M$ .*

Para desarrollar el principio variacional que nos proporciona las ecuaciones de campo hamiltonianas necesitamos considerar levantamientos de difeomorfismos y campos de vectores de  $\mathbb{R}^k \times Q$  a  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ . Comenzamos este apartado recordando estos conceptos que pueden encontrarse en Saunders [125].

Sea  $f : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$  un morfismo de  $\hat{\pi}_Q$ -fibrados tal que la aplicación  $f_Q : Q \rightarrow Q$  en la base es un difeomorfismo. Queremos levantar  $f$  a un difeomorfismo

$$j^{1*}f : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$$

tal que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q & \xrightarrow{j^{1*}f} & \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \\ \downarrow (\hat{\pi}_Q)_{1,0} & & \downarrow (\hat{\pi}_Q)_{1,0} \\ \mathbb{R}^k \times Q & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^k \times Q \\ \downarrow \hat{\pi}_Q & & \downarrow \hat{\pi}_Q \\ Q & \xrightarrow{f_Q} & Q \end{array}$$

Podemos así introducir las siguientes definiciones (véase Saunders [125]):

**Definición 6.3** Sea  $f : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$  un morfismo de  $\hat{\pi}_Q$ -fibrados tal que la aplicación  $f_Q : Q \rightarrow Q$  entre las bases es un difeomorfismo. Se define el levantamiento de  $f$  a  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  como la aplicación  $j^{1*}f : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  definida por

$$(j^{1*}f)(j_{\mathbf{q}}^1\sigma) := j_{f_Q(\mathbf{q})}^1(f \circ \sigma \circ f_Q^{-1}),$$

donde  $\sigma = (\sigma_{\mathbb{R}^k}, id_Q)$  y  $\sigma_{\mathbb{R}^k} : Q \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^k \times Q \xrightarrow{\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}} \mathbb{R}^k$ .



Localmente, si  $f(t^B, q^j) = (f^A(t^B, q^j), f_Q^i(q^j))$  entonces

$$j^{1*}f(t^B, q^j, p_j^B) = \left( f^A(t^B, q^j), f_Q^i(q^j), \left( \frac{\partial f^A}{\partial q^k} + p_k^B \frac{\partial f^A}{\partial t^B} \right) \frac{\partial (f_Q^{-1})^k}{\partial q^i} \circ f_Q(q^j) \right). \quad (6.3)$$

Teniendo en cuenta esta definición se introduce el levantamiento de campos de vectores de  $\mathbb{R}^k \times Q$  a  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  como sigue.

**Definición 6.4** Sea  $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  un campo de vectores  $\hat{\pi}_Q$ -proyectable. El **levantamiento natural** de  $Z$  a  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  es el campo de vectores  $Z^{1*}$  cuyo grupo local uniparamétrico de difeomorfismos son los levantamientos  $\{j^{1*}\sigma_s\}$  del grupo uniparamétrico local de difeomorfismos  $\{\sigma_s\}$  de  $Z$ .

Localmente, si  $Z = Z^A \frac{\partial}{\partial t^A} + Z^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ , entonces

$$Z^{1*} = Z^A \frac{\partial}{\partial t^A} + Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left( \frac{dZ^A}{dq^i} - p_j^B \frac{dZ^j}{dq^i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i^B},$$

donde  $d/dq^i$  denota la derivada total, esto es,

$$\frac{d}{dq^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} + p_i^B \frac{\partial}{\partial t^B}.$$

**Observación 6.5** Saunders también define el levantamiento de campos de vectores a  $J^1\hat{\pi}_Q = \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  sin imponer la restricción de que sean  $\hat{\pi}_Q$ -proyectables. En el caso particular de que los campos sean  $\hat{\pi}_Q$ -proyectables las dos definiciones introducidas por Saunders coinciden.

◇

**Definición 6.6** Denotemos por  $\text{Sec}_c(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q)$  el conjunto de secciones con soporte compacto de

$$\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \circ (\hat{\pi}_Q)_{1,0} : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Sea  $H: \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  un hamiltoniano, se define la acción integral asociada a  $H$  por

$$\mathbb{H}: \text{Sec}_c(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi \mapsto \mathbb{H}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^k} \psi^* \Theta,$$

donde

$$\Theta = \sum_{A=1}^k \theta^A \wedge d^{k-1}t^A - Hd^k t, \quad (6.4)$$

es una  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  siendo  $d^{k-1}t^A = \iota_{\frac{\partial}{\partial t^A}} d^k t$  y  $d^k t = dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^k$ .

**Observación 6.7** El la definición anterior la sección  $\psi$  hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q & \\ (\hat{\pi}_Q)_{1,0} \swarrow & \uparrow \psi & \\ \mathbb{R}^k \times Q & & \mathbb{R}^k \\ \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \searrow & & \end{array}$$

◇

Con el fin de definir los extremales de  $\mathbb{H}$  demostramos el siguiente lema.

**Lema 6.8** Sea  $\psi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  un elemento de  $\text{Sec}_c(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q)$ . Para cada campo de vectores  $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  con flujo  $\{\sigma_s\}$  se verifica que

$$\psi_s := j^{1*}\sigma_s \circ \psi$$

es una sección de la proyección canónica  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \circ (\hat{\pi}_Q)_{1,0} : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

*Demostración:*

Si  $Z$  es un campo de vectores  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical, entonces tiene la siguiente expresión local

$$Z(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = Z^i(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}, \quad (6.5)$$

para ciertas funciones  $Z^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times Q)$ .

Por ser  $\sigma_s$  es el grupo uniparamétrico asociado a  $Z$  se tiene

$$Z(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = (\sigma_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})_*(0) \left( \frac{d}{ds} \Big|_0 \right) = \frac{d(t^A \circ \sigma_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})}{ds} \Big|_0 \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} + \frac{d(q^i \circ \sigma_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})}{ds} \Big|_0 \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}.$$

Comparando (6.5) y la expresión anterior de  $Z(\mathbf{t}, \mathbf{q})$  se sigue que

$$\left. \frac{d(t^A \circ \sigma_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})}{ds} \right|_0 = 0,$$

de donde se deduce que

$$(t^A \circ \sigma_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})(s) = \text{constante},$$

pero como  $\sigma_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(0) = (\mathbf{t}, \mathbf{q})$  sabemos que se verifica  $(t^A \circ \sigma_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})(0) = t^A$  y así

$$(t^A \circ \sigma_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})(s) = t^A.$$

Entonces se verifica

$$\sigma_s(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = (\mathbf{t}, q^i \circ \sigma_s(\mathbf{t}, \mathbf{q})),$$

lo que implica que  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \circ \sigma_s = \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ .

Por lo tanto, utilizando (6.3) se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \circ (\hat{\pi}_Q)_{1,0} \circ \psi_s(\mathbf{t}) &= \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \circ (\hat{\pi}_Q)_{1,0} \circ j^{1*} \sigma_s \circ \psi(\mathbf{t}) \\ &= \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \circ (\hat{\pi}_Q)_{1,0}(\mathbf{t}, (\sigma_s)_Q^i(\mathbf{q}), p_k^A \frac{\partial((\sigma_s)_Q^{-1})^k}{\partial q^i} \circ (\sigma_s)_Q) = \mathbf{t} \end{aligned}$$

esto es,  $\psi_s$  es una sección de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \circ (\hat{\pi}_Q)_{1,0}$ .

□

**Definición 6.9** Una sección  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ , perteneciente al conjunto  $\text{Sec}_c(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q)$ , es un **extremal** de  $\mathbb{H}$  si

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathbb{H}(j^{1*} \sigma_s \circ \psi) = 0$$

donde  $\{\sigma_s\}$  es el grupo local uniparamétrico de difeomorfismos de algún campo de vectores  $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  que sea  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical y  $\hat{\pi}_Q$ -proyectable.

**Observación 6.10** En la definición anterior necesitamos que el campo  $Z$  sea  $\hat{\pi}_Q$  proyectable para poder definir  $Z^{1*}$  como el campo con flujo  $\{j^{1*} \sigma_s\}$ , y que sea  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical para garantizar que cada

$$\psi_s := j^{1*} \sigma_s \circ \psi$$

sea una sección de la proyección canónica  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \circ (\hat{\pi}_Q)_{1,0} : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ , lo que hemos demostrado en el lema anterior.

El problema variacional, asociado a un hamiltoniano  $H$ , consiste en obtener los extremales de la acción integral  $\mathbb{H}$ .

**Teorema 6.11** Sean  $\psi \in \text{Sec}_c(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q)$  y  $H: \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función hamiltoniana. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $\psi$  es un extremal del problema variacional asociado a  $H$
- (2)  $\int_{\mathbb{R}^k} \psi^* \mathcal{L}_{Z^1*} \Theta = 0$ , para cada  $Z$   $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical y  $\hat{\pi}_Q$ -proyectable.
- (3)  $\psi^* \iota_{Z^1*} d\Theta = 0$ , para cada  $Z$   $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical y  $\hat{\pi}_Q$ -proyectable.
- (4) Si  $(U; t^A, q^i, p_i^A)$  es un sistema natural de coordenadas en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ , entonces  $\psi$  verifica las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl, esto es,

$$\left. \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \right|_t = \left. \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \right|_{\psi(t)}, \quad \sum_{A=1}^k \left. \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \right|_t = - \left. \frac{\partial H}{\partial q^i} \right|_{\psi(t)}. \quad (6.6)$$

*Demostración:*

(1  $\Leftrightarrow$  2) Sea  $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  un campo de vectores  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical y  $\hat{\pi}_Q$ -proyectable. Denotemos por  $\sigma_s$  el grupo uniparamétrico de difeomorfismos asociado a  $Z$ .

En estas condiciones se verifica:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathbb{H}(j^{1*} \sigma_s \circ \psi) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \int_{\mathbb{R}^k} (j^{1*} \sigma_s \circ \psi)^* \Theta \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left( \int_{\mathbb{R}^k} (j^{1*} \sigma_s \circ \psi)^* \Theta - \int_{\mathbb{R}^k} \psi^* \Theta \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left( \int_{\mathbb{R}^k} \psi^* (j^{1*} \sigma_s)^* \Theta - \int_{\mathbb{R}^k} \psi^* \Theta \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}^k} \psi^* [(j^{1*} \sigma_s)^* \Theta - \Theta] \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \psi^* \mathcal{L}_{Z^1*} \Theta, \end{aligned}$$

con lo que el resultado buscado se sigue inmediatamente.

(2  $\Leftrightarrow$  3) Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{L}_{Z^1*}\Theta = d\iota_{Z^1*}\Theta + \iota_{Z^1*}d\Theta,$$

se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^k} \psi^* \mathcal{L}_{Z^1*}\Theta = \int_{\mathbb{R}^k} \psi^* d\iota_{Z^1*}\Theta + \int_{\mathbb{R}^k} \psi^* \iota_{Z^1*}d\Theta$$

y como  $\psi$  tiene soporte compacto, usando el teorema de Stokes se llega a

$$\int_{\mathbb{R}^k} \psi^* d\iota_{Z^1*}\Theta = \int_{\mathbb{R}^k} d\psi^* \iota_{Z^1*}\Theta = 0,$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^k} \psi^* \mathcal{L}_{Z^1*}\Theta = 0$$

(para cada  $Z$  campo de vectores  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical) si, y sólo si,

$$\int_{\mathbb{R}^k} \psi^* \iota_{Z^1*}d\Theta = 0,$$

y según el teorema fundamental del cálculo variacional, esto es equivalente a que se verifique

$$\psi^* \iota_{Z^1*}d\Theta = 0.$$

(3  $\Leftrightarrow$  4) Supongamos que

$$\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$$

es una sección de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \circ (\hat{\pi}_Q)_{1,0}$  verificando

$$\psi^* \iota_{Z^1*}d\Theta = 0,$$

para cada  $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  campo de vectores  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical.

En coordenadas locales si

$$Z = Z^i \frac{\partial}{\partial q^i},$$

para ciertas funciones  $Z^i \in \mathcal{C}^\infty(Q)$  entonces

$$Z^{1*} = Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} - p_j^A \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i^A}.$$

Por lo tanto, se verifica:

$$\begin{aligned}
\iota_{Z^1*} d\Theta &= \iota_{Z^1*} \left( \sum_{A=1}^k dp_i^A \wedge dq^i \wedge d^{k-1}t^A - dH \wedge d^k t \right) \\
&= -Z^i \left( \sum_{A=1}^k dp_i^A \wedge d^{k-1}t^A + \frac{\partial H}{\partial q^i} d^k t \right) \\
&\quad - \sum_{A=1}^k p_j^A \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \left( dq^i \wedge d^{k-1}t^A - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} d^k t \right).
\end{aligned} \tag{6.7}$$

De este modo, si

$$\psi(\mathbf{t}) = (t^A, \psi^i(\mathbf{t}), \psi_i^A(\mathbf{t}))$$

entonces en los puntos imagen de  $\psi$  se verifica  $q^i = \psi^i(\mathbf{t})$  y  $p_i^A = \psi_i^A(\mathbf{t})$ , y así de (6.7) y teniendo en cuenta la notación  $Z^i(\mathbf{t}) := (Z^i \circ \psi)(\mathbf{t})$  se obtiene,

$$\begin{aligned}
0 &= [\psi^* \iota_{Z^1*} d\Theta](\mathbf{t}) = -Z^i(\mathbf{t}) \left( \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) d^k t \\
&\quad - \sum_{A=1}^k \psi_j^A(\mathbf{t}) \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) d^k t \\
&= \left[ -Z^i(\mathbf{t}) \left( \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) - \sum_{A=1}^k \psi_j^A(\mathbf{t}) \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) \right] d^k t
\end{aligned}$$

para cada campo de vectores  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical y  $\hat{\pi}_Q$ -proyectable  $Z$ .

La identidad anterior es equivalente a la siguiente expresión:

$$Z^i(\mathbf{t}) \left( \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) + \sum_{A=1}^k \psi_j^A(\mathbf{t}) \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) = 0,$$

para cada  $Z^i(t^A, q^j)$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
Z^i(\mathbf{t}) \left( \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) &= 0 \\
\sum_{A=1}^k \psi_j^A(\mathbf{t}) \frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

De la primera de las identidades de (6.8) se obtiene el primer grupo de las ecuaciones de Hamilton, esto es,

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} = - \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})}.$$

Para obtener el segundo grupo de las ecuaciones de Hamilton, consideramos ahora el entorno coordinado  $(U; t^A, q^i, p_i^A)$ . Como existe una sección crítica pasando por cada punto en  $U$ , de la segunda identidad de (6.8) se obtiene que

$$\frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right) = 0.$$

Por último, como los  $Z^i$  se pueden elegir de modo arbitrario, podemos elegirlos de tal forma que  $\frac{\partial Z^j}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{t}}$  tome valores arbitrarios y en consecuencia,

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} = 0,$$

que es el segundo grupo de las ecuaciones de Hamilton.

El recíproco es trivial considerando los cálculos efectuados a lo largo de la demostración.

□

**Observación 6.12** A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda y N. Román-Roy en [36] describen un principio variacional en el contexto multisimpléctico. Tanto en este caso como en el que hemos descrito nosotros llegamos a la misma expresión de las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl, (6.6).

◇

C. Versión geométrica de las ecuaciones de Hamilton.

En este apartado incluimos la formulación  $k$ -cosimpléctica de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (6.6) descrito por M. de León *et al.* [83].

**Teorema 6.13** Sea  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función hamiltoniana definida sobre una variedad  $k$ -cosimpléctica  $(M, \eta^A, \omega^A, V)$  y  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  un campo de  $k$ -vectores en  $M$  tal que

$$\eta^A(X_B) = \delta_B^A, \quad 1 \leq A, B \leq k$$

$$\sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega^A = dH - \sum_{A=1}^k R_A(H) \eta^A. \quad (6.9)$$

Si  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ ,  $\psi(\mathbf{t}) = (t^A, \psi^i(\mathbf{t}), \psi_i^A(\mathbf{t}))$  es una sección integral del campo de  $k$ -vectores  $\mathbf{X}$ , entonces  $\psi$  es una solución de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (6.6).

*Demostración:*

Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  un campo de  $k$ -vectores en  $M$  solución de (6.9).

El Teorema de Darboux 6.2 nos dice que  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  se escribe localmente como sigue

$$X_A = (X_A)_B \frac{\partial}{\partial t^B} + (X_A)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_A)_i^B \frac{\partial}{\partial p_i^B}$$

entonces, si  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  es solución de (6.9) se tienen las siguientes identidades,

$$(X_A)_B = \delta_A^B, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i^A} = (X_A)^i, \quad \frac{\partial H}{\partial q^i} = - \sum_{A=1}^k (X_A)_i^A. \quad (6.10)$$

Supongamos que  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  es integrable y  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow M$  es una sección integral de  $\mathbf{X}$ , localmente dada por

$$\psi(\mathbf{t}) = (t^A, \psi^i(\mathbf{t}), \psi_i^A(\mathbf{t})),$$

entonces

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial t^B} = (X_B)^i \circ \psi, \quad \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^B} = (X_B)_i^A \circ \psi. \quad (6.11)$$

Por tanto, de (6.10) y (6.11) obtenemos que  $\psi(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \psi^i(\mathbf{t}), \psi_i^A(\mathbf{t}))$  es solución de las siguientes ecuaciones

$$\left. \frac{\partial H}{\partial q^i} \right|_{\psi(\mathbf{t})} = - \sum_{A=1}^k \left. \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}}, \quad \left. \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \right|_{\psi(\mathbf{t})} = \left. \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}},$$



que coinciden con las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl (6.6.)

□

Así, las ecuaciones (6.9) pueden considerarse como una *versión geométrica* de las ecuaciones de campo hamiltonianas. A partir de ahora a las ecuaciones (6.9) las denominaremos **ecuaciones geométricas de Hamilton** en el contexto  $k$ -cosimpléctico.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores podemos afirmar que las ecuaciones de la electrostática, consideradas al inicio de esta subsección, se pueden escribir geoméricamente como sigue

$$dt^A(X_B) = \delta_{AB}, \quad 1 \leq A, B \leq 3$$

$$\sum_{A=1}^3 \iota_{X_A} \omega^A = dH - \sum_{A=1}^3 R_A(H) dt^A.$$

**Observación 6.14** Nótese, que en general, las ecuaciones (6.9) no tienen una única solución. De hecho, si  $(M, \eta^A, \omega^A, V)$  es una variedad  $k$ -cosimpléctica podemos definir el morfismo de fibrados sobre  $M$

$$\Omega^\sharp : T_k^1 M \longrightarrow T^* M$$

$$(X_1, \dots, X_k) \mapsto \Omega^\sharp(X_1, \dots, X_k) = \sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega^A + \eta^A(X_A) \eta^A, \quad (6.12)$$

y, denotando por  $\mathcal{M}_k(C^\infty(M))$  el espacio de matrices de orden  $k$  cuyas componentes son funciones en  $M$ , se puede considerar la aplicación

$$\eta^\sharp : T_k^1 M \longrightarrow \mathcal{M}_k(C^\infty(M))$$

$$(X_1, \dots, X_k) \mapsto \eta^\sharp(X_1, \dots, X_k) = (\eta^A(X_B)), \quad (6.13)$$

entonces las soluciones de (6.9) son de la forma

$$(X_1, \dots, X_k) + (\ker \Omega^\sharp \cap \ker \eta^\sharp),$$

donde  $(X_1, \dots, X_k)$  es una solución particular de dichas ecuaciones.

A partir de las condiciones locales (6.10) podemos definir, en un entorno de cada punto  $x \in M$ , un campo de  $k$ -vectores que verifica (6.9). Por ejemplo, pongamos

$$(X_A)^B = \delta_A^B, \quad (X_1)_i = \frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (X_A)_i^B = 0 \text{ for } A \neq 1 \neq B, \quad (X_A)^i = \frac{\partial H}{\partial p_i^A}.$$

Ahora, usando una partición de la unidad en la variedad  $M$ , uno puede construir un campo de  $k$ -vectores global, que es una solución de (6.9). Véase M. de León *et al.* [83].

◇

**Observación 6.15** En el caso  $k = 1$  con  $M = \mathbb{R} \times T^*Q$  las ecuaciones (6.9) coinciden con las ecuaciones de la Mecánica hamiltoniana no autónoma. Por lo tanto este formalismo engloba el formalismo hamiltoniano de la Mecánica dependiente del tiempo.

◇

## 6.2. El enfoque lagrangiano.

En esta sección recordaremos los principales elementos y resultados de la formulación lagrangiana  $k$ -cosimpléctica de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange. Véase [84].

### 6.2.1. Elementos geométricos.

En esta subsección vamos a describir la variedad  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , así como algunos elementos geométricos que en ella podemos definir de modo canónico. Además la dotaremos con una estructura  $k$ -cosimpléctica cuando consideramos un lagrangiano regular.

A. La variedad  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

Sea  $Q$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . En este apartado vamos a considerar la variedad  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , donde  $T_k^1 Q$  denota el fibrado tangente de las  $k^1$ -velocidades, que hemos explicado en la sección 1.2.1.A.

Así un elemento de  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  es una familia

$$(\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})$$

formada por un elemento  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$  y por  $k$  vectores tangentes a  $Q$  en el mismo punto  $\mathbf{q} \in Q$ .

Como hemos visto en la sección 1.2.1.A., la variedad  $T_k^1 Q$  se identifica con la variedad  $J_0^1(\mathbb{R}^k, Q)$  de los 1-jets de aplicaciones  $\phi_Q: \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  con origen en  $0 \in \mathbb{R}^k$ ; la identificación entre estas dos variedades viene dada por el difeomorfismo

$$\begin{aligned} J_0^1(\mathbb{R}^k, Q) &\equiv TQ \oplus \dots \oplus TQ \\ j_{0, \mathbf{q}}^1 \phi_Q &\equiv (v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{q} = \phi_Q(0)$ , y  $v_{A\mathbf{q}} = (\phi_Q)_*(0)[(\partial/\partial t^A)(0)]$ ,  $1 \leq A \leq k$ .

Cada aplicación  $\phi_Q: \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  se puede identificar con una sección  $\phi = (id_{\mathbb{R}^k}, \phi_Q)$  del fibrado trivial  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}: \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Así, si consideramos los 1-jets de secciones del fibrado trivial  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$  podemos establecer un difeomorfismo entre la variedad  $J^1 \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$  de 1-jets de secciones del fibrado trivial  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}: \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  y la variedad  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , via el difeomorfismo dado por

$$\begin{aligned} J^1 \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} &\rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \\ j_{\mathbf{t}}^1 \phi &= j_{\mathbf{t}}^1 (id_{\mathbb{R}^k}, \phi_Q) \rightarrow (\mathbf{t}, v_1, \dots, v_k) \end{aligned} \tag{6.14}$$

donde  $\phi_Q: \mathbb{R}^k \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^k \times Q \xrightarrow{\hat{\pi}_Q} Q$  y

$$v_A = (\phi_Q)_*(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \quad 1 \leq A \leq k.$$

Denotemos por  $p_Q: \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow Q$  la proyección canónica, esto es

$$p_Q(\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = \mathbf{q}.$$

Si  $(q^i)_{1 \leq i \leq n}$  es un sistema local de coordenadas en  $U \subseteq Q$ , entonces las coordenadas locales inducidas  $(t^A, q^i, v_A^i)_{1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n}$  en  $p_Q^{-1}(U) = \mathbb{R}^k \times T_k^1 U$  son

$$t^A(j_{\mathbf{t}}^1 \phi) = t^A(\mathbf{t}) = t^A, \quad q^i(j_{\mathbf{t}}^1 \phi) = q^i(\phi_Q(\mathbf{t})), \quad v_A^i(j_{\mathbf{t}}^1 \phi) = \frac{\partial(q^i \circ \phi_Q)}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} t^A(\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) &= t^A(\mathbf{t}) = t^A, \quad q^i(\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = q^i(\mathbf{q}); \\ v_A^i(\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) &= v_{A\mathbf{q}}(q^i). \end{aligned}$$

El siguiente diagrama conmutativo recoge la notación que emplearemos a lo largo de esta memoria para referirnos a las proyecciones canónicas:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & p_Q & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q & \xrightarrow{(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0}} & \mathbb{R}^k \times Q & \xrightarrow{\hat{\pi}_Q} & Q \\
 & \searrow & \downarrow \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} & & \\
 & & \mathbb{R}^k & & 
 \end{array}$$

$(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_1$

definidas por:

$$\begin{aligned}
 \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}(\mathbf{t}, \mathbf{q}) &= \mathbf{t}, \quad (\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0}(\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = (\mathbf{t}, \mathbf{q}), \quad p_Q(\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = \mathbf{q}, \\
 \hat{\pi}_Q(\mathbf{t}, \mathbf{q}) &= \mathbf{q}, \quad (\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_1(\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = \mathbf{t}.
 \end{aligned}$$

**B. Campos de vectores canónicos en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .**

Un objeto geométrico importante en el fibrado  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  es el campo de vectores de Liouville generalizado.

**Definición 6.16** *El campo de vectores de Liouville  $\Delta$  sobre  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  se define como el generador infinitesimal del flujo dado por*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) &\longrightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \\
 (s, (\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})) &\mapsto (\mathbf{t}, e^s v_{1\mathbf{q}}, \dots, e^s v_{k\mathbf{q}}).
 \end{aligned}$$

*Su expresión en coordenadas locales es*

$$\Delta = \sum_{i,A} v_A^i \frac{\partial}{\partial v_A^i}. \quad (6.15)$$

**Definición 6.17** *Los campos de vectores canónicos  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  sobre  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  se definen como los generadores infinitesimales de los flujos dados por*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) &\longrightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \\
 (s, (\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})) &\mapsto (\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{A-1\mathbf{q}}, e^s v_{A\mathbf{q}}, v_{A+1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}),
 \end{aligned}$$

para cada  $A = 1, \dots, k$ . Su expresión local es:

$$\Delta_A = \sum_{i=1}^n v_A^i \frac{\partial}{\partial v_A^i}, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (6.16)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (6.15) y (6.16) es evidente que

$$\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_k.$$

C. Campos de tensores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

En este apartado vamos a introducir una familia  $(S^1, \dots, S^k)$  de  $k$  campos de tensores de tipo  $(1, 1)$  en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ . Estos tensores nos permitirán, de modo análogo a como ocurre en los sistemas mecánicos, introducir las denominadas formas lagrangianas.

Para introducir esta familia de tensores vamos a partir de la estructura  $k$ -tangente canónica definida sobre el fibrado de las  $k^1$ -velocidades  $T_k^1 Q$ , véase sección 1.2.1.C.

La estructura  $k$ -tangente canónica en  $T_k^1 Q$  es el conjunto  $(J^1, \dots, J^k)$  de campos de tensores de tipo  $(1, 1)$  sobre  $T_k^1 Q$  definidos por

$$J^A(w_{\mathbf{q}})(Z_{w_{\mathbf{q}}}) = \left( (\tau_Q^k)_*(w_{\mathbf{q}})(Z_{w_{\mathbf{q}}}) \right)_{w_{\mathbf{q}}}^{V_A},$$

donde  $Z_{w_{\mathbf{q}}} \in T_{w_{\mathbf{q}}}(T_k^1 Q)$ ,  $w_{\mathbf{q}} \in T_k^1 Q$ .

Aquí  $(X_{\mathbf{q}})_{w_{\mathbf{q}}}^{V_A}$  denota el levantamiento vertical  $A$ -ésimo de un vector arbitrario  $X_{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}} Q$  a  $T_k^1 Q$ , definido en (1.20).

Para cada  $A = 1, \dots, k$  vamos a considerar la *extensión natural* del campo de tensores  $J^A$  en  $T_k^1 Q$  a  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , que denotaremos por  $S^A$  y que tiene la misma expresión local (1.25) que  $J^A$  esto es,

$$S^A = \frac{\partial}{\partial v_A^i} \otimes dq^i \quad 1 \leq A \leq k. \quad (6.17)$$

Estos tensores  $S^A$  se llaman **campos de tensores canónicos** en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

En  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  también vamos a considerar otra familia de campos de tensores  $(\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^k)$  de tipo  $(1, 1)$  definidos por

$$\hat{S}^A = S^A - \Delta_A \otimes dt^A, \quad 1 \leq A \leq k, \quad (6.18)$$

cuya expresion local es

$$\widehat{S}^A = \frac{\partial}{\partial v_A^i} \otimes dq^i - v_A^i \frac{\partial}{\partial v_A^i} \otimes dt^A, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (6.19)$$

Los tensores  $\widehat{S}^A$  nos permitirán caracterizar ciertas ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden definidas en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

D. Formas lagrangianas.

De modo análogo a lo que ocurre en los sistemas mecánicos, con los campos de tensores canónicos que acabamos de definir y dada  $L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función denominada **función lagrangiana**, se definen las  $k$  1-formas diferenciales en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$

$$\theta_L^A = dL \circ S^A, \quad 1 \leq A \leq k \quad (6.20)$$

y a partir de ellas las  $k$  2-formas diferenciales

$$\omega_L^A = -d\theta_L^A, \quad 1 \leq A \leq k, \quad (6.21)$$

que llamaremos **formas lagrangianas** en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

En un sistema local de coordenadas  $(t^A, q^i, v_A^i)_{A=1, \dots, k; i=1, \dots, n}$  de (6.17) y (6.20) se obtiene

$$\theta_L^A = \frac{\partial L}{\partial v_A^i} dq^i, \quad 1 \leq A \leq k \quad (6.22)$$

y así de (6.21) y (6.22) obtenemos

$$\omega_L^A = \frac{\partial^2 L}{\partial t^B \partial v_A^i} dq^i \wedge dt^B + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^i \partial v_A^i} dq^i \wedge dv_B^i. \quad (6.23)$$

Las formas lagrangianas que se acaban de introducir están relacionadas con las formas canónicas  $\theta^A, \omega^A, 1 \leq A \leq k$  de  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^* Q$  (definidas en (6.1)) mediante la aplicación de Legendre asociada a la función lagrangiana  $L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 6.18** Sea  $L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano, la aplicación de Legendre  $FL : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^* Q$  se define como sigue:

$$FL(\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) = (\mathbf{t}, [FL(\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})]^1, \dots, [FL(\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})]^k)$$

donde

$$[FL(\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}})]^A(u_{\mathbf{q}}) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(t, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{A\mathbf{q}} + su_{\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) ,$$

para cada  $A = 1, \dots, k$ .

La expresión local de  $FL$  es

$$FL : (t^A, q^i, v_A^i) \longrightarrow (t^A, q^i, \frac{\partial L}{\partial v_A^i}) . \quad (6.24)$$

De las expresiones locales (6.2), (6.22), (6.23) y (6.24) de  $\theta^A$ ,  $\omega^A$ ,  $\theta_L^A$  y  $\omega_L^A$  se obtienen la relación entre las formas canónicas en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  y las formas Lagrangianas definidas en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1Q$ :

$$\theta_L^A = FL^* \theta^A, \quad \omega_L^A = FL^* \omega^A, \quad 1 \leq A \leq k . \quad (6.25)$$

### E. Estructura $k$ -cosimpléctica

Las 2-formas diferenciales  $(\omega_L^1, \dots, \omega_L^k)$  que acabamos de definir junto con las 1-formas cerradas  $(dt^1, \dots, dt^k)$  y la distribución vertical  $V = \ker T(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0}$  determinada por el fibrado  $(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0} : \mathbb{R}^k \times T_k^1Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$  constituirán una estructura  $k$ -cosimpléctica sobre el fibrado  $\mathbb{R}^k \times T_k^1Q$  si añadimos alguna condición de regularidad sobre la función lagrangiana  $L$ .

**Definición 6.19** Una función lagrangiana  $L : \mathbb{R}^k \times T_k^1Q \longrightarrow \mathbb{R}$  se dice que es **regular** (resp. **hiperregular**) si la correspondiente aplicación de Legendre  $FL$  es un difeomorfismo local (resp. global). En otro caso  $L$  es llamado lagrangiano **singular**

De (6.24) obtenemos que  $L$  es regular si, y sólo si,  $\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j} \right) \neq 0$ .

En [84] M. de León *et al.* demuestran la siguiente proposición que permite dotar a  $\mathbb{R}^k \times T_k^1Q$  de una estructura  $k$ -cosimpléctica.

**Proposición 6.20** Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1)  $L$  es regular,
- (2)  $FL$  es un difeomorfismo local,
- (3)  $(dt^A, \omega_L^A, V)$  es una estructura  $k$ -cosimpléctica en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  donde

$$V = \ker T(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0} = \left\langle \frac{\partial}{\partial v_1^i}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_k^i} \right\rangle_{i=1, \dots, n}$$

es la distribución vertical del fibrado  $(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0} : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$ .

### 6.2.2. Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

En el desarrollo del formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico aparecen ciertas ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden definidas en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ . En esta sección vamos a describir las ecuaciones a las que nos estamos refiriendo aquí.

Como veremos a continuación las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden (que abreviaremos como SOPDE, del inglés, *second order partial differential equation*) que aparecen en el formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico son un tipo especial de campos de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

Recordemos que un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  es una sección del fibrado de las  $k^1$ -velocidades  $T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$ . Antes de definir qué es un SOPDE vamos a estudiar este fibrado y en especial cierta aplicación definida en él.

A. La variedad  $T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$ .

En la sección 1.2.1. A. hemos definido el fibrado tangente de las  $k^1$ -velocidades de una variedad diferenciable arbitraria. A lo largo de esta sección tendrá especial interés considerar el fibrado tangente de las  $k^1$ -velocidades de la variedad producto  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ . Por este motivo dedicamos este apartado a describir con mayor detalle esta variedad.

Consideramos el fibrado

$$\tau_{\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q}^k : T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q.$$

Si  $(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)$  un elemento arbitrario de  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , entonces un elemento de la fibra  $(T_k^1)_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)}(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) = (\tau_{\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q}^k)^{-1}(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)$  es una  $k$ -tupla

$$\mathbf{v}_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)} = (v_{1(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)}, \dots, v_{k(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)})$$



de vectores tangentes a  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  en el punto  $(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)$ .

Denotemos por  $(t^A, q^i, v_A^i)_{1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n}$  un sistema de coordenadas locales en la variedad  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

Así, cada vector tangente  $(v_A)_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)}$  se escribe localmente como sigue

$$(v_A)_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)} = (v_A)_B \frac{\partial}{\partial t^B} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)} + (v_A)^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)} + (v_A)_B^i \frac{\partial}{\partial v_B^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)}. \quad (6.26)$$

De (1.19) y (6.26) deducimos que las coordenadas locales inducidas en la variedad  $T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$  son:

$$(t^A, q^i, v_A^i, (v_A)_B, (v_A)^i, (v_A)_B^i)_{1 \leq A, B \leq k, 1 \leq i \leq n}.$$

A continuación vamos a definir una aplicación en  $T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$  que emplearemos en el siguiente apartado para definir el concepto de SOPDE.

Consideremos la identidad entre las variedades  $T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$  y  $T_k^1 \mathbb{R}^k \times T_k^1(T_k^1 Q)$  dada por:

$$\begin{aligned} T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) &\equiv T_k^1 \mathbb{R}^k \times T_k^1(T_k^1 Q) \\ \mathbf{v}_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)} = (v_1(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q), \dots, v_k(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)) &\equiv \left( T_k^1(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})(\mathbf{v}_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)}), T_k^1(\hat{\pi}_{T_k^1 Q})(\mathbf{v}_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)}) \right) \end{aligned}$$

donde  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}: \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  y  $\hat{\pi}_{T_k^1 Q}: \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$  son las proyecciones canónicas.

En un sistema local de coordenadas, si los vectores  $v_A(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)$  se escriben localmente como en (6.26) entonces

$$T_k^1(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})(v_1(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q), \dots, v_k(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)) = ((v_1)_B \frac{\partial}{\partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}}, \dots, (v_k)_B \frac{\partial}{\partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}})$$

y

$$\begin{aligned} T_k^1(\hat{\pi}_{T_k^1 Q})(v_1(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q), \dots, v_k(\mathbf{t}, \mathbf{w}_q)) &= ((v_1)^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{p}} + (v_1)_B^i \frac{\partial}{\partial v_B^i} \Big|_{\mathbf{w}_q}, \dots, \\ &\quad (v_k)^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{w}_q} + (v_k)_B^i \frac{\partial}{\partial v_B^i} \Big|_{\mathbf{w}_q}). \end{aligned}$$

Definimos la aplicación

$$F := \tau_{\mathbb{R}^k}^k \times T_k^1(\tau_Q^k) : T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) \equiv T_k^1 \mathbb{R}^k \times T_k^1(T_k^1 Q) \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$$

como sigue

$$\begin{aligned}
F(v(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}})) &= F(v_1(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}}), \dots, v_k(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}})) \\
&= \tau_{\mathbb{R}^k}^k \times T_k^1 \tau_Q^k \left( T_k^1(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})(v_1(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}}), \dots, v_k(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}})), T_k^1(\hat{\pi}_{T_k^1 Q})(v_1(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}}), \dots, v_k(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}})) \right) \\
&= \left( \tau_{\mathbb{R}^k}^k \circ T_k^1(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})(v_1(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}}), \dots, v_k(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}})), T_k^1(\tau_Q^k \circ \hat{\pi}_{T_k^1 Q})(v_1(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}}), \dots, v_k(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}})) \right),
\end{aligned} \tag{6.27}$$

donde  $\tau_Q^k: T_k^1 Q \rightarrow Q$ .

Si consideramos los vectores  $v_{A(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}})}$  con la expresión local (6.26), entonces de la definición anterior se llega a que

$$F(v_1(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}}), \dots, v_k(\mathbf{t}, \mathbf{w}_{\mathbf{q}})) = (\mathbf{t}, (v_1)^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}}, \dots, (v_k)^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}}),$$

donde hemos tenido en cuenta la definición 1.37 de la prolongación canónica

$$T_k^1(\tau_Q^k) = T\tau_Q^k \times \dots \times T\tau_Q^k: T_k^1(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q$$

y que

$$T_{\mathbf{w}_{\mathbf{q}}} \tau_Q^k \left( (v_A)^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{w}_{\mathbf{q}}} + (v_A)^\ell \frac{\partial}{\partial v_A^\ell} \Big|_{\mathbf{w}_{\mathbf{q}}} \right) = (v_A)^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}} \quad 1 \leq A \leq k.$$

Por lo tanto, la aplicación  $F$  se escribe localmente como sigue:

$$F = \tau_{\mathbb{R}^k}^k \times T_k^1 \tau_Q^k: (t^A, q^i, v_A^i, (v_A)_B, (v_A)^i, (v_A)_B^i) \rightarrow (t^A, q^i, (v_A)^i) \tag{6.28}$$

Esta aplicación  $F$  aquí definida será utilizada para definir SOPDES en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  (véase epígrafe B de esta subsección).

**B. SOPDES en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .**

Ahora es cuando realmente introducimos los SOPDES en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

**Definición 6.21** *Un campo de  $k$ -vectores  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  se dice que es una **ecuación en derivadas parciales de segundo orden (SOPDE)** si :*

$$dt^A(X_B) = \delta_B^A \quad y \quad (\tau_{\mathbb{R}^k}^k \times T_k^1 \tau_Q^k) \circ X = id_{\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q}$$

donde la aplicación

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbb{R}^k}^k \times T_k^1 \tau_Q^k & : & T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) & \rightarrow & \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \\ (t^A, q^i, v_A^i, (v_A)^B, (v_A)^i, (v_A)_B^i) & \mapsto & (t^A, q^i, (v_A)^i) \end{aligned}$$

fue definida en (6.27).

La expresión local de un SOPDE  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  en un sistema local de coordenadas  $(t^A, q^i, v_A^i)$  de  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  es la siguiente:

$$X_A(t^B, q^i, v_B^i) = \frac{\partial}{\partial t^A} + v_A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_A)_B^i \frac{\partial}{\partial v_B^i}, \quad 1 \leq A \leq k, \quad (6.29)$$

donde  $(X_A)_B^i$  son funciones en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

Como consecuencia directa de la expresión local anterior, deducimos que los campos de vectores  $\{X_1, \dots, X_k\}$  son linealmente independientes.

Los SOPDE's pueden caracterizarse a partir de los campos de vectores canónicos y los campos de tensores de tipo (1,1) que hemos definido anteriormente en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

**Proposición 6.22** *Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1)  $\mathbf{X}$  es un SOPDE.
- (2)  $dt^A(X_B) = \delta_B^A, \quad S^A(X_A) = \Delta_A, \quad 1 \leq A, B \leq k.$
- (3)  $dt^A(X_B) = \delta_B^A, \quad \hat{S}^A(X_B) = 0, \quad 1 \leq A, B \leq k.$

*Demostración:*

Por ser  $\mathbf{X}$  un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , empleando las coordenadas canónicas  $(t^A, q^i, v_A^i)$ , sabemos que cada  $X_A$  se escribe localmente como sigue:

$$X_A = (X_A)_B \frac{\partial}{\partial t^B} + (X_A)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_A)_B^i \frac{\partial}{\partial v_B^i} \quad (6.30)$$

para ciertas funciones  $(X_A)_B, (X_A)^i, (X_A)_B^i, 1 \leq A, B \leq k; 1 \leq i \leq n$  definidas en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

El resultado enunciado en esta proposición es una consecuencia directa de las expresiones locales (6.16), (6.17), (6.19), (6.29) y (6.30) de  $\Delta_A$ ,  $S^A$ ,  $\widehat{S}^A$ , del SOPDE  $\mathbf{X}$  y de un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

□

A continuación vamos a caracterizar las secciones integrales de los SOPDE's. Comenzamos introduciendo la siguiente definición

**Definición 6.23** Sea  $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  una aplicación, definimos la **primera prolongación**  $\phi^{[1]}$  de  $\phi$  como la aplicación

$$\begin{aligned} \phi^{[1]}: \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \\ \mathbf{t} &\longrightarrow (\mathbf{t}, j_0^1 \phi_{\mathbf{t}}) \equiv \left( \mathbf{t}, \phi_*(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^1} \Big|_{\mathbf{t}} \right), \dots, \phi_*(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^k} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \right) \end{aligned}$$

donde  $\phi_{\mathbf{t}}(s) = \phi(\mathbf{t} + s)$ . En coordenadas locales

$$\phi^{[1]}(t^1, \dots, t^k) = (t^1, \dots, t^k, \phi^i(t^1, \dots, t^k), \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A}(t^1, \dots, t^k)). \quad (6.31)$$

**Observación 6.24** Sea  $(X_1, \dots, X_k)$  un SOPDE. De (6.29) obtenemos: una aplicación  $\psi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , dada por  $\psi(\mathbf{t}) = (\psi_B(\mathbf{t}), \psi^i(\mathbf{t}), \psi_A^i(\mathbf{t}))$ , es una sección integral de  $(X_1, \dots, X_k)$  si y sólo si

$$\frac{\partial \psi_B}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} = \delta_A^B, \quad \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} = \psi_A^i(\mathbf{t}), \quad \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} = (X_A)^i_B(\psi(\mathbf{t})). \quad (6.32)$$

Entonces si  $(X_1, \dots, X_k)$  es integrable, de (6.32) deducimos que  $(X_A)^i_B = (X_B)^i_A$ .

Observemos que la aplicación

$$\begin{aligned} (id_{\mathbb{R}^k}, pr_2 \circ \psi): \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \\ t &\longrightarrow (\mathbf{t}, \psi^i(\mathbf{t}), \psi_A^i(\mathbf{t})) \end{aligned}$$

coincide con la primera prolongación  $\phi^{[1]}$  de la aplicación

$$\phi = p_Q \circ \psi: \mathbb{R}^k \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \xrightarrow{p_Q} Q,$$

esto es  $\phi(\mathbf{t}) = (\psi^i(\mathbf{t}))$ .

Recíprocamente si  $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es cualquier aplicación tal que

$$\left. \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial t^A \partial t^B} \right|_{\mathbf{t}} = (X_A)_B^i(\phi^{[1]}(\mathbf{t})),$$

entonces  $\phi^{[1]}$  es una sección integral de  $(X_1, \dots, X_k)$ .

◇

### 6.2.3. Formalismo lagrangiano: ecuaciones de Euler - Lagrange.

Comenzamos esta subsección considerando un ejemplo de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange. A continuación establecemos un principio variacional del que se deducen dichas ecuaciones para finalizar la sección dando la descripción geométrica de las mismas desarrollada por M. de León *et. al.* en [84].

A. Ejemplo: la membrana vibrante.

Consideramos las ecuaciones del movimiento asociadas al sistema dado por una membrana elástica rectangular que en su posición de equilibrio coincide con el plano XY y que vibra transversalmente.

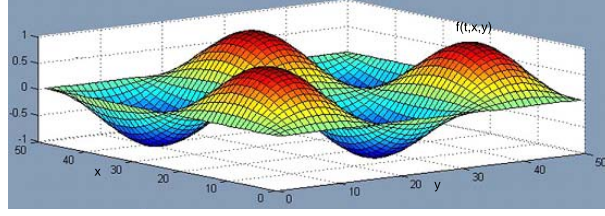
Supongamos que, como acabamos de comentar, estudiamos las vibraciones transversales de una membrana elástica delgada de densidad uniforme  $\sigma$  sometida a una tensión  $T$ . Si en la posición de equilibrio la membrana coincide con el plano XY, entonces las vibraciones transversales de la membrana  $\phi$  están gobernadas por la ecuación de ondas bidimensional

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^1)^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^2)^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^3)^2} \quad (6.33)$$

donde  $c^2 = T/\sigma$ , siendo  $c$  la velocidad de propagación de la onda y de modo que las soluciones son aplicaciones

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t^1, t^2, t^3) &\mapsto \phi(t^1, t^2, t^3). \end{aligned}$$

Estos campos  $\phi$  describen en cada punto  $(t^1, t^2, t^3)$  el desplazamiento vertical del punto  $(t^2, t^3)$  de la membrana situada en el plano XY en el instante de tiempo  $t = t^1$ .

Figura 6.1: *Membrana vibrante*

La ecuación (6.33) puede expresarse como un ejemplo de ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a una función lagrangiana  $L$  definida sobre el fibrado  $\mathbb{R}^3 \times T_3^1\mathbb{R}$ .

Si definimos  $L : \mathbb{R}^3 \times T_3^1\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$L(t^1, t^2, t^3, q, v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2}(v_1^2 - c^2(v_2^2 + v_3^2))$$

donde  $q$  representa la variable  $\phi$  y  $v_A$  la variable  $\partial\phi/\partial t^A$ ,  $1 \leq A \leq 3$ ; entonces

$$\frac{\partial L}{\partial v_1} = v_1, \quad \frac{\partial L}{\partial v_2} = -c^2 v_2, \quad \frac{\partial L}{\partial v_3} = -c^2 v_3, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Evaluando las identidades previas en

$$\phi^{[1]}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \phi(\mathbf{t}), \left. \frac{\partial \phi}{\partial t^1} \right|_{\mathbf{t}}, \left. \frac{\partial \phi}{\partial t^2} \right|_{\mathbf{t}}, \left. \frac{\partial \phi}{\partial t^3} \right|_{\mathbf{t}})$$

se obtiene

$$\left. \frac{\partial L}{\partial v_1} \right|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t^1} \right|_{\mathbf{t}}, \quad \left. \frac{\partial L}{\partial v_2} \right|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})} = -c^2 \left. \frac{\partial \phi}{\partial t^2} \right|_{\mathbf{t}}, \quad \left. \frac{\partial L}{\partial v_3} \right|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})} = -c^2 \left. \frac{\partial \phi}{\partial t^3} \right|_{\mathbf{t}}, \quad \left. \frac{\partial L}{\partial q} \right|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})} = 0.$$

Por lo tanto se tiene

$$\sum_{A=1}^3 \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \left. \frac{\partial L}{\partial t^A} \right|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})} \right) = \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^1)^2} \right|_{\mathbf{t}} - c^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^2)^2} \right|_{\mathbf{t}} - c^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^3)^2} \right|_{\mathbf{t}}$$

y así las ecuaciones (6.33) se pueden escribir como sigue:

$$\sum_{A=1}^3 \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \left. \frac{\partial L}{\partial t^A} \right|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})} \right) = \left. \frac{\partial L}{\partial q} \right|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})},$$

siendo este un ejemplo de las ecuaciones de campos de Euler-Lagrange.

En general, consideremos un campo definido por una función  $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow Q$ , cuya expresión local es

$$\phi(t^1, \dots, t^k) = (\phi^1(t^1, \dots, t^k), \dots, \phi^n(t^1, \dots, t^k)).$$

Una función lagrangiana  $L$  es una función  $\mathbb{R}$ -valuada

$$L(t^A, \phi^i(\mathbf{t}), \left. \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}})$$

que depende de las variables espaciales  $t^A$ , de las variables-componentes del campo  $q^i = \phi^i$  y de las primeras derivadas parciales del campo  $\partial \phi^i / \partial t^A(\mathbf{t})$ . Por lo tanto podríamos considerar que  $L$  está definida en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  y así  $L: \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ .

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para una función lagrangiana  $L$  con solución  $(\phi^i(t^1, \dots, t^k))$  son el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden dado por

$$\sum_{A=1}^k \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_t + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_t \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})},$$

donde  $1 \leq i \leq n$  y  $\phi^{[1]}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \phi^i(\mathbf{t}), \left. \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \right|_t)$ , que suelen escribirse como sigue

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})}, \quad v_A^i(\phi^{[1]}(\mathbf{t})) = \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, \quad (6.34)$$

donde cada solución  $\phi^{[1]}: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  está dada por

$$\phi^{[1]}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \phi^i(\mathbf{t}), \left. \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}}).$$

**Observación 6.25** Obsérvese que teniendo en cuenta la expresión local (6.31) de la primera prolongación  $\phi^{[1]}$  de  $\phi$ , el segundo grupo de ecuaciones de (6.34) se transforma en un conjunto de identidades.

◇

## B. Principio variacional y ecuaciones de campo de Euler-Lagrange.

En este apartado deducimos las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de un principio variacional.

El principio variacional que vamos a considerar aquí se desarrolla sobre el fibrado trivial  $\mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ . La teoría general para un fibrado arbitrario  $\hat{\pi} : Y \rightarrow X$  puede verse en A. Echeverría-Enríquez *et al.* [35].

Para desarrollar el principio variacional que nos proporciona las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange necesitamos considerar levantamientos de difeomorfismos y campos de vectores  $\mathbb{R}^k \times Q$  a  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ . Comenzamos este apartado recordando estos conceptos que pueden encontrarse en Saunders [125].

Sea  $f : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$  un difeomorfismo de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -fibrados y sea  $f_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  el difeomorfismo inducido en la base. Queremos levantar  $f$  a un difeomorfismo

$$j^1 f : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$$

tal que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q & \xrightarrow{j^1 f} & \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \\ \downarrow (\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0} & & \downarrow (\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0} \\ \mathbb{R}^k \times Q & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^k \times Q \\ \downarrow \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} & & \downarrow \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{f_{\mathbb{R}^k}} & \mathbb{R}^k \end{array}$$

Podemos así introducir la siguiente definición, (véase Saunders [125]):

**Definición 6.26** Sea  $f : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$  un morfismo de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -fibrados y denotemos por  $f_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  la aplicación en la base, que suponemos un difeomorfismo. La aplicación  $j^1 f : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  definida por

$$(j^1 f)(j_t^1 \phi) := j^1(f \circ \phi \circ f_{\mathbb{R}^k}^{-1})(f_{\mathbb{R}^k}(\mathbf{t})) \equiv j_{f_{\mathbb{R}^k}(\mathbf{t})}^1(f \circ \phi \circ f_{\mathbb{R}^k}^{-1}),$$

con  $\phi(id_{\mathbb{R}^k}, \phi_Q)$  una sección de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$  se llama levantamiento canónico del difeomorfismo  $f$ .



Localmente, si  $f(t^A, q^i) = (f_{\mathbb{R}^k}^A(t^B), f^i(t^B, q^j))$  entonces

$$j^1 f(t^A, q^i, v_A^i) = (f^A(t^B), f^i(t^B, q^j), \frac{df^i}{dt^B} \frac{\partial (f_{\mathbb{R}^k}^{-1})^B}{\partial t^A} \circ f_{\mathbb{R}^k}(t^C)),$$

donde  $df^i/dt^B$  denota la derivada total, esto es,

$$\frac{df^i}{dt^B} = \frac{\partial f^i}{\partial t^B} + v_B^j \frac{\partial f^i}{\partial q^j}.$$

Es evidente que si consideramos otro representante  $\varphi$  con el mismo 1-jet en  $t$  obtenemos el mismo resultado, esto es,  $j^1 f$  está bien definido.

Teniendo en cuenta la definición anterior se introduce el levantamiento natural de campos de vectores de  $\mathbb{R}^k \times Q$  a  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  como sigue:

**Definición 6.27** Sea  $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  un campo de vectores  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -proyectable. Se llama **levantamiento natural** de  $Z$  a  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , al campo de vectores  $Z^1 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$  tal que, tiene asociado el grupo uniparamétrico local de difeomorfismos  $\{j^1 \tau_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ , con  $\{\tau_s\}_{s \in \mathbb{R}}$  el grupo uniparamétrico local de difeomorfismos de  $Z$ .

Localmente, si cada campo de vectores  $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  tiene la siguiente expresión local,

$$Z = Z^A \frac{\partial}{\partial t^A} + Z^i \frac{\partial}{\partial q^i},$$

entonces

$$Z^1 = Z^A \frac{\partial}{\partial t^A} + Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left( \frac{dZ^i}{dt^A} - v_B^i \frac{dZ^B}{dt^A} \right) \frac{\partial}{\partial v_A^i},$$

donde  $d/dt^A$  denota la derivada total, esto es,

$$\frac{d}{dt^A} = \frac{\partial}{\partial t^A} + v_A^j \frac{\partial}{\partial q^j}$$

Sea  $\phi = (id_{\mathbb{R}^k}, \phi_Q) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$  es una sección de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$  y  $\phi_Q^{[1]}$  su primera prolongación, puesto que  $Ld^k t$  es una  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , entonces  $(\phi_Q^{[1]})^*(Ld^k t)$  es una  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^k$ . Así podemos definir:

**Definición 6.28** Denotemos por  $Sec_c(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \times Q)$  el conjunto de secciones de

$$\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$$

con soporte compacto.

Se define la acción integral asociada a un lagrangiano  $L: \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbb{S} : Sec_c(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \times Q) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto \mathbb{S}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^k} (\phi_Q^{[1]})^*(Ld^k t) \end{aligned}$$

**Lema 6.29** Sea  $\phi \in Sec_c(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \times Q)$ . Si  $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  es  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical entonces

$$\phi_s := \tau_s \circ \phi$$

es una sección de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

*Demostración:*

Puesto que  $Z$  es  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical tiene la siguiente expresión local

$$Z(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = Z^i(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}, \quad (6.35)$$

y como  $\tau_s$  es el grupo uniparamétrico asociado a  $Z$  se tiene

$$Z(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = (\tau_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})_*(0) \left( \frac{d}{ds} \Big|_0 \right) = \frac{d(t^A \circ \tau_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})}{ds} \Big|_0 \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} + \frac{d(q^i \circ \tau_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})}{ds} \Big|_0 \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}.$$

Comparando (6.35) y la expresión anterior de  $Z(\mathbf{t}, \mathbf{q})$  se sigue que

$$\frac{d(t^A \circ \tau_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})}{ds} \Big|_0 = 0,$$

entonces

$$(t^A \circ \tau_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})(s) = \text{constante},$$

pero como  $\tau_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(0) = (\mathbf{t}, \mathbf{q})$  obtenemos que

$$(t^A \circ \tau_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})(0) = t^A$$

y así  $(t^A \circ \tau_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})(s) = t^A \circ (t^A \circ \tau_s)(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = t^A$ . Entonces se verifica que

$$\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \circ \tau_s = \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}.$$

Teniendo en cuenta esta última identidad se deduce que  $\phi_s$  es una sección de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ . En efecto, se verifica

$$\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \circ \phi_s = \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \circ \tau_s \circ \phi = \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \circ \phi = id_{\mathbb{R}^k},$$

en donde en la última igualdad hemos utilizado que  $\phi$  es una sección de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ .

□

**Definición 6.30** Una sección  $\phi = (id_{\mathbb{R}^k}, \phi_Q): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$ , perteneciente al conjunto  $Sec_c(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \times Q)$ , es un **extremal** de  $\mathbb{S}$  si

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathbb{S}(\tau_s \circ \phi) = 0$$

donde  $\{\tau_s\}$  es el grupo local uniparamétrico de difeomorfismos de algún campo de vectores  $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  que sea  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical.

El problema variacional asociado al lagrangiano  $L$  consiste en obtener los extremales de la acción  $\mathbb{S}$ .

**Teorema 6.31** Sea  $\phi \in Sec_C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \times Q)$  y  $L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $\phi$  es un extremal del problema variacional asociado al lagrangiano  $L$ .
- (2)  $\int_{\mathbb{R}^k} (\phi_Q^{[1]})^* (\mathcal{L}_{Z^1}(Ld^k t)) = 0$ , para cada campo de vectores  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical  $Z$ .
- (3)  $\phi_Q$  es solución de las ecuaciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange (6.34).

*Demostración:*

(1  $\Leftrightarrow$  2) Sea  $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  un campo de vectores  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical y  $\tau_s$  el grupo uniparamétrico de difeomorfismos asociado a  $Z$ .

Puesto que  $(\tau_s \circ \phi)_Q^{[1]} = j^1 \tau_s \circ \phi_Q^{[1]}$ , entonces

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathbb{S}(\tau_s \circ \phi) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \int_{\mathbb{R}^k} ((\phi_s)_Q^{[1]})^*(Ld^k t) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{\mathbb{R}^k} ((\phi_s)_Q^{[1]})^*(Ld^k t) - \int_{\mathbb{R}^k} ((\phi_0)_Q^{[1]})^*(Ld^k t) \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{\mathbb{R}^k} ((\tau_s \circ \phi)_Q^{[1]})^*(Ld^k t) - \int_{\mathbb{R}^k} (\phi_Q^{[1]})^*(Ld^k t) \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{\mathbb{R}^k} (\phi_Q^{[1]})^*(j^1 \tau_s)^*(Ld^k t) - \int_{\mathbb{R}^k} (\phi_Q^{[1]})^*(Ld^k t) \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^k} (\phi_Q^{[1]})^*[(j^1 \tau_s)^*(Ld^k t) - (Ld^k t)] \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} (\phi_Q^{[1]})^* \mathcal{L}_{Z^1}(Ld^k t),
\end{aligned}$$

con lo que el resultado buscado se sigue inmediatamente.

(2  $\Leftrightarrow$  3) Sabemos que  $\phi$  es un extremal o una sección crítica de  $\mathbb{S}$  si, y sólo si, para cada campo de vectores  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -vertical  $Z$  se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^k} (\phi_Q^{[1]})^*(\mathcal{L}_{Z^1}(Ld^k t)) = 0.$$

Teniendo en cuenta la identidad

$$\mathcal{L}_{Z^1}(Ld^k t) = \iota_{Z^1}(dL \wedge d^k t) + d\iota_{Z^1}(Ld^k t) \quad (6.36)$$

y puesto que  $\phi$  tiene soporte compacto, usando el Teorema de Stokes se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^k} ((\phi_Q)^{[1]})^* d\iota_{Z^1}(Ld^k t) = \int_{\mathbb{R}^k} d((\phi_Q)^{[1]})^* \iota_{Z^1}(Ld^k t) = 0. \quad (6.37)$$

Así de (6.36) y (6.37) obtenemos que  $\phi$  es un extremal si, y sólo si

$$\int_{\mathbb{R}^k} (\phi_Q^{[1]})^* \iota_{Z^1}(dL \wedge d^k t) = 0.$$

Si  $Z_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} = Z^i(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}$  entonces la expresión local de  $Z^1$  es

$$Z^1 = Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left( \frac{\partial Z^i}{\partial t^A} + \frac{\partial Z^i}{\partial q^j} v_A^j \right) \frac{\partial}{\partial v_A^i},$$

por tanto

$$\iota_{Z^1}(dL \wedge d^k t) = \left( Z^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \left( \frac{\partial Z^i}{\partial t^A} + \frac{\partial Z^i}{\partial q^j} v_A^j \right) \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \right) d^k t. \quad (6.38)$$

Así, de (6.38) se obtiene

$$\begin{aligned} & [(\phi_Q^{[1]})^* \iota_{Z^1}(dL \wedge d^k t)](\mathbf{t}) = \\ & = \left( (Z^i \circ \phi)(\mathbf{t}) \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi_Q^{[1]}(\mathbf{t})} + \left( \frac{\partial Z^i}{\partial t^A} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} + \frac{\partial Z^i}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi_Q^{[1]}(\mathbf{t})} \right) d^k t. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Observemos que el último sumando de (6.39) verifica

$$\frac{\partial Z^i}{\partial q^j} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi_Q^{[1]}(\mathbf{t})} d^k t = \left( \frac{\partial(Z^i \circ \phi)}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial Z^i}{\partial t^A} \Big|_{\phi(\mathbf{t})} \right) \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi_Q^{[1]}(\mathbf{t})} d^k t$$

y así el último término de esta expresión se cancela con el segundo de (6.39).

Por lo tanto, calculando la integral, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^k} (\phi_Q^{[1]})^* \iota_{Z^1}(dL \wedge d^k t) = \int_{\mathbb{R}^k} (Z^i \circ \phi) \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi_Q^{[1]}(\mathbf{t})} d^k t + \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial(Z^i \circ \phi)}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi_Q^{[1]}(\mathbf{t})} d^k t.$$

Teniendo en cuenta que  $\phi$  tiene soporte compacto e integrando por partes tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial(Z^i \circ \phi)}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi_Q^{[1]}(\mathbf{t})} d^k t = - \int_{\mathbb{R}^k} (Z^i \circ \phi)(\mathbf{t}) \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi_Q^{[1]}(\mathbf{t})} \right) d^k t$$

de donde se deduce que

$$\int_{\mathbb{R}^k} (\phi_Q^{[1]})^* \iota_{Z^1}(dL \wedge d^k t) = \int_{\mathbb{R}^k} (Z^i \circ \phi)(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi_Q^{[1]}(\mathbf{t})} - \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi_Q^{[1]}(\mathbf{t})} \right) \right) d^k t = 0.$$

Por ser las funciones  $Z^i$  arbitrarias, de esta última igualdad obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi_Q^{[1]}(\mathbf{t})} - \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi_Q^{[1]}(\mathbf{t})} \right) = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

## C. Versión geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

A continuación recordamos la formulación  $k$ -cosimpléctica de las ecuaciones de Euler-Lagrange (6.34) desarrollada por M. de León *et al.* en [84].

Consideramos las ecuaciones

$$\begin{aligned} dt^A(X_B) &= \delta_B^A, \quad 1 \leq A, B \leq k, \\ \sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega_L^A &= dE_L + \sum_{A=1}^k \frac{\partial L}{\partial t^A} dt^A \end{aligned} \quad (6.40)$$

donde  $E_L = \Delta(L) - L$ . Si escribimos la expresión local de  $X_A$  como sigue

$$X_A = (X_A)_B \frac{\partial}{\partial t^B} + (X_A)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_A)_B^i \frac{\partial}{\partial v_B^i}, \quad 1 \leq A \leq k$$

obtenemos que (6.40) es equivalente a las ecuaciones

$$\begin{aligned} (X_A)_B &= \delta_A^B, \\ (X_B)^i \frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v_B^i} &= v_B^i \frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v_B^i}, \\ (X_C)^j \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^i \partial v_C^j} &= v_C^j \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^i \partial v_C^j}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_B^i} (v_B^j - (X_B)^j) + \frac{\partial^2 L}{\partial t^B \partial v_B^i} + v_B^k \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_B^i} + (X_B)_C^k \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_B^i} &= \frac{\partial L}{\partial q^i}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Cuando  $L$  es regular obtenemos que estas ecuaciones son equivalentes a las siguientes

$$(X_A)_B = \delta_A^B, \quad (X_A)^i = v_A^i, \quad \sum_{A=1}^k X_A \left( \frac{\partial L}{\partial v_B^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (6.42)$$

Por lo tanto cuando  $L$  es regular  $X_A$  se expresa localmente como sigue

$$X_A = \frac{\partial}{\partial t^A} + v_A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_A)_B^i \frac{\partial}{\partial v_B^i}$$

y por lo tanto  $(X_1, \dots, X_k)$  es un SOPDE.

Además se verifica el siguiente resultado:

**Teorema 6.32** Sea  $L$  un lagrangiano y  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  un campo de  $k$ -vectores tal que

$$dt^A(X_B) = \delta_B^A, \quad \sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega_L^A = dE_L + \sum_{A=1}^k \frac{\partial L}{\partial t^A} dt^A \quad (6.43)$$

donde  $E_L = C(L) - L$  y  $1 \leq A, B \leq k$ . Entonces

(1) Si  $L$  es regular entonces  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  es un SOPDE.

Además, si  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  es una sección integral de  $\mathbf{X}$ , entonces

$$\phi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \xrightarrow{p_Q} Q$$

es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (6.34).

(2) Si  $(X_1, \dots, X_k)$  es integrable y  $\phi^{[1]} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  es una sección integral, entonces  $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (6.34).

*Demostración:*

(1) es una consecuencia inmediata de la tercera ecuación de (6.41) y de la tercera ecuación en (6.42). Si  $\phi^{[1]}$  es una sección integral de  $\mathbf{X}$  entonces de la última ecuación de (6.41) y la expresión local de  $\phi^{[1]}$  deducimos que  $\phi$  solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (6.34).

□

**Observación 6.33** Si  $L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  es regular, entonces  $(dt^A, \omega_L^A, V)$  es una estructura  $k$ -cosimpléctica en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ . Los campos de Reeb  $(R_L)_A$  correspondientes a esta estructura están caracterizados por

$$\iota_{(R_L)_A} dt^B = \delta_A^B, \quad \iota_{(R_L)_A} \omega_L^B = 0,$$

y verifican que

$$(R_L)_A(E_L) = -\frac{\partial L}{\partial t^A}.$$

Por consiguiente si escribimos las ecuaciones de Hamilton (6.9) con  $H = E_L$  para la variedad  $k$ -cosimpléctica

$$(M = \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q, dt^A, \omega_L^A, V)$$

obtenemos

$$dt^A(X_B) = \delta_B^A, \quad \sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega^A = dE_L - \sum_{A=1}^k (R_L)_A(E_L) dt^A .$$

es decir las ecuaciones (6.40).

◇

**Observación 6.34** La relación entre las formas  $\theta_L^A$  y  $\omega_L^A$  y las formas  $\theta_L$  y  $\Omega_L$  del formalismo multisimpléctico de teoría de campos está establecida en [79, 118].

Los campos de  $k$ -vectores  $(X_1, \dots, X_k)$  nos permiten construir un campo de multivectores  $\mathfrak{X} = X_1 \wedge \dots \wedge X_k$ , que está relacionado con el campo de multivectores que es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, descritas por A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda y N. Román-Roy en [39], Sección 7, y de ellos se obtienen las mismas soluciones para las ecuaciones de Euler-Lagrange.

◇

**Observación 6.35** Si reescribimos la ecuaciones (6.40) para el caso  $k = 1$ , obtenemos las ecuaciones

$$dt(X) = 1, \quad \iota_{X_L} \omega_L = dE_L + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (6.44)$$

que son equivalentes a las ecuaciones dinámicas

$$dt(X) = 1, \quad \iota_{X_L} \Omega_L = 0,$$

donde  $\Omega_L = \omega_L + dE_L \wedge dt$  es la 2-forma de Poincaré-Cartan asociada al lagrangiano  $L$ , véase [37]. Recordemos que estas ecuaciones son la formulación geométrica de la Mecánica no autónoma.

◇



### 6.3. Equivalencia entre la formulación lagrangiana y hamiltoniana

En esta sección vamos a recordar la equivalencia que existe entre el formalismo  $k$ -cosimpléctico lagrangiano y hamiltoniano de las Teorías Clásicas de Campos de Primer Orden. Esta equivalencia fue establecida por M. de León *et al* en [84].

Consideramos una función lagrangiana hiperregular  $L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ .

En este caso sabemos que la aplicación de Legendre  $FL$  es un difeomorfismo global por lo que podemos definir una función hamiltoniana  $H : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^* Q \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$H = E_L \circ FL^{-1}$$

donde  $FL^{-1}$  es la inversa de  $FL$ . En estas condiciones se puede demostrar el siguiente resultado.

#### Teorema 6.36

- (1) Si  $\mathbf{X}_L = ((X_L)_1, \dots, (X_L)_k)$  es una solución de (6.40), entonces el campo de  $k$ -vectores  $\mathbf{X}_H = ((X_H)_1, \dots, (X_H)_k)$ , donde  $(X_H)_A = FL_*((X_L)_A)$ ,  $1 \leq A \leq k$ , es una solución de las ecuaciones (6.9) en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^* Q$ , con  $H = E_L \circ FL^{-1}$ .
- (2) Si  $\mathbf{X}_L = ((X_L)_1, \dots, (X_L)_k)$  es integrable y  $\phi^{[1]}$  es una sección integral, entonces  $\varphi = FL \circ \phi^{[1]}$  es una sección integral de  $\mathbf{X}_H = ((X_H)_1, \dots, (X_H)_k)$  y por lo tanto es una solución de las ecuaciones de Hamilton-De Donde-Weyl (6.6) con  $H = E_L \circ FL^{-1}$ .

*Demostración:*

- (1) Es una consecuencia inmediata de (6.9) y (6.40) usando que  $FL^* \eta^A = dt^A$ ,  $FL^* \omega^A = \omega_L^A$ , y  $E_L = H \circ FL^{-1}$ .
- (2) Es una consecuencia de la Definición 1.17 de sección integral de un campo de  $k$ -vectores.

□



## Capítulo 7

# Formalismo $k$ -cosimpléctico y conexiones no lineales en $\mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

En la descripción de la Mecánica dependiente del tiempo la energía lagrangiana y la construcción del formalismo hamiltoniano necesitan la elección, “a priori”, de una conexión en el fibrado  $\mathbb{R} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ . Este hecho fue analizado por Echeverría-Enríquez *et al.* en [34].

La finalidad de este capítulo es extender estos resultados a las Teorías Clásicas de Campos de Primer Orden, usando el formalismo  $k$ -cosimpléctico descrito por M. de León *et al.* en [83, 84] y que se ha recordado en el capítulo previo.

A lo largo de este capítulo definiremos una función energía  $E_L^\nabla: \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ , asociada a cada lagrangiano  $L: \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  y a cada conexión de Erhesmann definida en el fibrado trivial  $\mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

El principal resultado que demostraremos a lo largo de este capítulo es que esta función  $E_L^\nabla$  nos permite establecer una correspondencia biyectiva entre el conjunto de soluciones de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange y el conjunto de soluciones de las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl.

## 7.1. Conexiones y energía lagrangiana.

En esta sección vamos a recordar el concepto de conexión de Erhesmann en el fibrado trivial  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}: \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

Además definiremos una función energía  $E_L^\nabla: \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  asociada a cada lagrangiano  $L: \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  y a cada conexión  $\nabla$  en  $\mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

### 7.1.1. Conexiones en $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}: \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

En esta subsección recordaremos el concepto de conexión no lineal en el fibrado trivial  $\mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ , así como los conceptos y propiedades relacionados con el mismo. Los contenidos de esa sección siguen el trabajo de A. Echeverría-Enríquez, M.C. Muñoz-Lecanda y N. Román-Roy [34] y el libro de Saunders [125].

Consideremos el fibrado trivial

$$\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}: \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

donde  $Q$  denota una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Como se ha comentado en el capítulo previo, el fibrado de 1-jets de secciones de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$  es

$$(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0}: J^1 \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \equiv \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q.$$

Con el fin de introducir conexiones, se debe estudiar el fibrado tangente de  $\mathbb{R}^k \times Q$ . Obsérvese que existe una identificación natural entre  $T(\mathbb{R}^k \times Q)$  y  $T\mathbb{R}^k \times TQ$  dada por

$$\begin{aligned} T(\mathbb{R}^k \times Q) &\rightarrow T\mathbb{R}^k \times TQ \\ u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} &\mapsto \left( (\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_*(\mathbf{t}, \mathbf{q})(u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}), (\hat{\pi}_Q)_*(\mathbf{t}, \mathbf{q})(u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}) \right) \end{aligned}$$

donde  $\hat{\pi}_Q: \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow Q$  es la proyección natural.

Además  $T\mathbb{R}^k \times TQ$  también se puede identificar con

$$(\hat{\pi}_Q)^* TQ \oplus (\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^* T\mathbb{R}^k$$

donde

$$(\hat{\pi}_Q)^* TQ \equiv \mathbb{R}^k \times TQ \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q \quad \text{y} \quad (\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^* T\mathbb{R}^k \equiv T\mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$$

son los fibrados pull-back definidos por los dos diagramas siguientes:

$$\begin{array}{ccc} (\hat{\pi}_Q)^*TQ & \longrightarrow & TQ \\ \downarrow & & \downarrow \tau_Q \\ \mathbb{R}^k \times Q & \xrightarrow{\hat{\pi}_Q} & Q \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*T\mathbb{R}^k & \longrightarrow & T\mathbb{R}^k \\ \downarrow & & \downarrow \tau_{\mathbb{R}^k} \\ \mathbb{R}^k \times Q & \xrightarrow{\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}} & \mathbb{R}^k \end{array}$$

Además  $(\hat{\pi}_Q)^*TQ$  se identifica con  $V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$  (el subfibrado vertical de  $T(\mathbb{R}^k \times Q)$  con respecto a  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ ). Así se tiene la descomposición natural

$$T(\mathbb{R}^k \times Q) = V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \oplus (\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*T\mathbb{R}^k$$

y  $(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*T\mathbb{R}^k$  se llama **subfibrado horizontal**.

La descomposición natural que se acaba de introducir se denomina **conexión estándar** en el fibrado  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ . La teoría de conexiones describe las posibles descomposiciones de este tipo.

Siguiendo el modelo anterior se tiene la siguiente proposición:

**Proposición 7.1** Sean  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  el fibrado trivial y  $(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0} : J^1(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \equiv \mathbb{R}^k \times T_k^1Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$  el correspondiente fibrado de 1-jets de secciones de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ . Los siguientes elementos son equivalentes:

(1) Una sección global de  $(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0} : \mathbb{R}^k \times T_k^1Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$ ; esto es, una aplicación

$$\Psi : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1Q$$

$$\text{tal que } (\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0} \circ \Psi = id_{\mathbb{R}^k \times Q}.$$

(2) Un subfibrado  $H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$  de  $T(\mathbb{R}^k \times Q)$  tal que

$$T(\mathbb{R}^k \times Q) = H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \oplus V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}).$$

(3) Una 1-forma  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -semibásica  $\nabla$  en  $\mathbb{R}^k \times Q$ , tal que  $\alpha \circ \nabla = \alpha$ , para toda 1-forma  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -semibásica  $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R}^k \times Q)$ .

*Demostración:*

La prueba de este resultado, en el caso general de un fibrado  $\pi : E \rightarrow M$  puede encontrarse en diferentes secciones de A. Echeverría *et al* [35] y en Saunders [125].

A continuación adaptaremos dicha demostración para el caso que estamos considerando, esto es, cuando  $E = \mathbb{R}^k \times Q$  y  $M = \mathbb{R}^k$ .

(1  $\Rightarrow$  2) Sea

$$\Psi : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \equiv J^1 \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$$

una sección de  $(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0}$  entonces, para cada elemento  $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k \times Q$  se verifica que

$$\Psi(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in J^1 \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k},$$

entonces existe

$$\phi = (id_{\mathbb{R}^k}, \phi_Q) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$$

sección de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$  con  $\phi(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \mathbf{q})$  tal que

$$\Psi(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = j_{\mathbf{t}}^1 \phi = j_{\mathbf{t}}^1 (id_{\mathbb{R}^k}, \phi_Q).$$

En estas condiciones definimos

$$H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) := Im T_{\mathbf{t}} \phi \quad y \quad H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) = \bigcup_{(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k \times Q} H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}).$$

Obsérvese que en la definición anterior el subespacio  $Im T_{\mathbf{t}} \phi$  no depende del representante  $\phi$  sino de la clase de equivalencia  $j_{\mathbf{t}}^1 \phi$ .

Sea  $\{\frac{\partial}{\partial t^1}|_t, \dots, \frac{\partial}{\partial t^k}|_t\}$  una base de  $T_{\mathbf{t}} \mathbb{R}^k$  entonces el espacio  $H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$  está localmente generado por los vectores

$$\phi_*(\mathbf{t})\left(\frac{\partial}{\partial t^A}\right)|_{\mathbf{t}} = \frac{\partial}{\partial t^A}\Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} + \frac{\partial(q^i \circ \phi_Q)}{\partial t^A}\Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \quad 1 \leq A \leq k.$$

Se verifica que

$$T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q) = H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) + V_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$$

por lo que todo elemento  $u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}$  de  $T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q)$  se puede escribir de la forma

$$u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}^h + u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}^v$$

donde  $u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}^h \in H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$  y  $u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}^v \in V_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$ . En efecto,

$$\begin{aligned} u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} &= f_A \frac{\partial}{\partial t^A}\Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} + g^i \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \\ &= f_A \left( \frac{\partial}{\partial t^A}\Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} + \frac{\partial(q^i \circ \phi_Q)}{\partial t^A}\Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \right) + (g^i - f_A \frac{\partial(q^i \circ \phi_Q)}{\partial t^A}\Big|_{\mathbf{t}}) \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \\ &= u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}^h + u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}^v \end{aligned}$$

por tanto

$$T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q) \subset H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) + V_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \subset T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q)$$

y así

$$T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q) = H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) + V_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}).$$

Además, si  $\eta \in H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \cap V_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$  entonces, puesto que  $\eta \in H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$  se tiene que cumplir

$$\eta = f^A \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} + \frac{\partial(q^i \circ \phi_Q)}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \right)$$

pero, por otra parte, como  $\eta \in V_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$  se verifica que  $f^A = 0$  para todo  $A$  y por lo tanto  $\eta = 0$ . Así podemos afirmar que

$$H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \cap V_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) = \{0\},$$

de donde se sigue que

$$T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q) = H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \oplus V_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$$

para cada  $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k \times Q$ .

(2  $\Rightarrow$  1) Supongamos que  $T(\mathbb{R}^k \times Q)$  se descompone en

$$T(\mathbb{R}^k \times Q) = H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \oplus V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}).$$

Entonces existe un modo natural de construir una sección de

$$(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0} : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q.$$

En efecto, sea  $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k \times Q$ , se tiene que

$$T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q) = H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \oplus V_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}).$$

De donde se sigue que la aplicación

$$T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \Big|_{H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})} : H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \subset T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q) \rightarrow T_{\mathbf{t}} \mathbb{R}^k$$

es un isomorfismo (aplicación lineal sobreyectiva entre espacios vectoriales lineales de dimensión  $k$ ) lo que nos garantiza la existencia de su inversa

$$(T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \Big|_{H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})})^{-1} : T_{\mathbf{t}} \mathbb{R}^k \rightarrow H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}).$$

Consideremos ahora la sección local

$$\phi_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$$

definida en un entorno de  $\mathbf{t}$  y tal que

$$\phi_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \mathbf{q}) \quad , \quad T_{\mathbf{t}}\phi_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} = (T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \Big|_{H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})})^{-1}$$

entonces tenemos una sección

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^k \times Q &\rightarrow J^1(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \equiv \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \\ (\mathbf{t}, \mathbf{q}) &\mapsto j_{\mathbf{t}}^1 \phi_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \end{aligned}$$

que es diferenciable ya que la descomposición

$$T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q) = V_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \oplus H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$$

depende diferenciablemente de  $(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ .

(2  $\Rightarrow$  3) Dado el subfibrado  $H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$  y la descomposición

$$T(\mathbb{R}^k \times Q) = H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \oplus V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}),$$

sean

$$h : T(\mathbb{R}^k \times Q) \rightarrow H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \quad \text{y} \quad v : T(\mathbb{R}^k \times Q) \rightarrow V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$$

las proyecciones sobre  $H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$  y  $V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$  respectivamente. Estas proyecciones inducen la descomposición

$$X = h(X) + v(X)$$

para cada  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$ . Entonces podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q) &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q) \\ X &\mapsto h(X) \end{aligned}$$

que es un  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times Q)$ -morfismo y verifica trivialmente las siguientes propiedades:

- (1)  $\nabla$  se anula sobre los campos de vectores  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -verticales.
- (2)  $\nabla \circ \nabla = \nabla$ .

Esto es consecuencia de que  $\nabla(\nabla(X)) = h(h(X)) = h(X)$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$ .



(3) Si  $\alpha$  es una 1-forma en  $\mathbb{R}^k \times Q$   $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -semibásica y  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  entonces

$$(\alpha \circ \nabla)(X) = \alpha(h(X)) = \alpha(h(X) + v(X)) = \alpha(X),$$

por ser  $\alpha$  semibásica. Por lo tanto,  $\alpha \circ \nabla = \alpha$ .

(3  $\Rightarrow$  2) En primer lugar, obsérvese que

$$\nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$$

es una aplicación  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times Q)$  que verifica

$$\alpha \circ \nabla = \alpha$$

para cada 1-forma  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -semibásica  $\alpha$ .

Sea  $\beta$  una 1-forma en  $\mathbb{R}^k \times Q$ , por ser  $\nabla$   $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -semibásica también lo es  $\beta \circ \nabla$  y por tanto  $\beta \circ \nabla \circ \nabla = \beta \circ \nabla$  de donde se sigue que

$$\nabla \circ \nabla = \nabla.$$

Así  $\nabla$  es un operador proyección en  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  así obtenemos la descomposición en suma directa

$$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q) = \text{Im} \nabla \oplus \ker \nabla.$$

Del mismo modo, para cada  $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k \times Q$ ,

$$\nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} : T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q) \rightarrow T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q)$$

induce la descomposición en suma directa

$$T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q) = \text{Im} \nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \oplus \ker \nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}.$$

Debemos probar que  $\ker \nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} = V_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$ .

Por ser  $\nabla$   $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -semibásica se tiene

$$V_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \subset \ker \nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}$$

y dado que el anulador de  $\text{Im} \nabla$ , esto es, el conjunto de 1-formas que se anulan sobre los elementos de  $\text{Im} \nabla$ , es el conjunto de formas  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -semibásicas se tiene la igualdad (véase lema 3.1.11 de Saunders [125]).

Definimos

$$H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) := \text{Im} \nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}$$

y

$$H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) = \bigcup_{(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k \times Q} H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$$

y procediendo como en un apartado anterior de la demostración se comprueba que

$$T(\mathbb{R}^k \times Q) = H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \oplus V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}).$$

□

**Definición 7.2** Una **conexión** en el fibrado  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  es uno de los elementos equivalentes anteriores. El espacio  $H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$  recibe el nombre de sub-fibrado horizontal de  $T(\mathbb{R}^k \times Q)$  asociado con la conexión  $\Psi$  y sus secciones son los campos de vectores horizontales. La forma  $\nabla$  se denomina forma de la conexión.

Ahora vamos a calcular las expresiones locales relativas a una conexión en el fibrado  $\mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

Consideremos un sistema local de coordenadas  $(t^A, q^i)_{1 \leq A \leq k, 1 \leq i \leq n}$  en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^k \times Q$ . La expresión general de una 1-forma  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -semibásica en  $\mathbb{R}^k \times Q$  con valores en  $T(\mathbb{R}^k \times Q)$  es

$$\nabla = f_A^B dt^A \otimes \frac{\partial}{\partial t^B} + \Gamma_A^i dt^A \otimes \frac{\partial}{\partial q^i}$$

pero como  $\nabla$  verifica  $\alpha \circ \nabla = \alpha$  para toda 1-forma  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -semibásica, en particular se verifica  $dt^B \circ \nabla = dt^B$ ,  $1 \leq B \leq k$  de donde se sigue que la expresión local de la forma de la conexión  $\nabla$  es

$$\nabla = dt^A \otimes \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + \Gamma_A^i \frac{\partial}{\partial q^i} \right) \quad (7.1)$$

donde  $\Gamma_A^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times Q)$ .

Por otra parte, como para cada  $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k \times Q$  se verifica

$$H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) = \text{Im} \nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}$$

entonces una base de la fibra  $H_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) = \text{Im} \nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}$  viene dada por

$$\nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \right) = \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} + \Gamma_A^i(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}, \quad 1 \leq A \leq k$$

y así  $H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$  está localmente generado por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t^A} + \Gamma_A^i \frac{\partial}{\partial q^i} \right\}_{1 \leq A \leq k}. \quad (7.2)$$

Por último, en este mismo sistema local de coordenadas se tiene

$$\Psi(t^A, q^i) = (t^A, q^i, \Gamma_A^i(t^B, q^j)). \quad (7.3)$$

Como se puede observar en la expresiones locales anteriores, la relación entre los distintos elementos que definen una conexión está determinada en coordenadas locales por las funciones  $\Gamma_i^A$ . Estas funciones se denominan **componentes de la conexión**.

**Observación 7.3** Sea  $\phi = (id_{\mathbb{R}^k}, \phi_Q) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$  un representante de  $\Psi(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ , es decir,  $\Psi(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = j_{\mathbf{t}}^1 \phi$  con  $\phi(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \mathbf{q})$ , entonces teniendo en cuenta el isomorfismo (6.14) obtenemos que

$$\Gamma_A^i(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = \left. \frac{\partial(q^i \circ \phi_Q)}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}}.$$

◇

A continuación vamos a describir con mayor detalle algunas consecuencias de la descomposición en suma directa

$$T(\mathbb{R}^k \times Q) = H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \oplus V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}). \quad (7.4)$$

Esta descomposición nos permite definir dos proyectores complementarios

$$h : T(\mathbb{R}^k \times Q) \rightarrow H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \quad \text{y} \quad v = id_{T(\mathbb{R}^k \times Q)} - h : T(\mathbb{R}^k \times Q) \rightarrow V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$$

por medio de las expresiones:

$$\begin{aligned} h(u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}) &= \nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}) \\ v(u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}) &= (id_{T(\mathbb{R}^k \times Q)} - h)(u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}) = u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} - \nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}), \end{aligned}$$

donde  $u_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \in T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q)$ .

Esto proyectores  $h$  y  $v$  se denominan **proyector horizontal y vertical** respectivamente. (Emplearemos los mismos símbolos  $h$  y  $v$  para la extensión natural de estas aplicaciones a campos de vectores).

La descomposición en suma directa (7.4) induce la siguiente descomposición

$$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q) = \text{Im} \nabla \oplus \text{Sec}(\mathbb{R}^k \times Q, V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}))$$

de modo que todo campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  se descompone en sus componentes *horizontal* y *vertical*:

$$X = h(X) + v(X) = \nabla(X) + (X - \nabla(X)).$$

Localmente, si

$$X = X_A \frac{\partial}{\partial t^A} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$$

donde  $X_A, X^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times Q)$  entonces

$$h(X) = X_A \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + \Gamma_A^i \frac{\partial}{\partial q^i} \right), \quad v(X) = (X^i - X_A \Gamma_A^i) \frac{\partial}{\partial q^i}. \quad (7.5)$$

Para finalizar esta sección recordamos la definición de curvatura de una conexión. Este concepto será necesario en las secciones 7.2 y 7.3 de este capítulo.

**Definición 7.4** (Saunders [125]). *La curvatura de una conexión  $\nabla$  es la aplicación  $\mathcal{R}_\nabla: \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  definida como sigue:*

$$\mathcal{R}_\nabla(X_1, X_2) := (id - \nabla)([\nabla(X_1), \nabla(X_2)]) = \iota_{[\nabla(X_1), \nabla(X_2)]}(id - \nabla)$$

para cada  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$ .

Usando la expresión en coordenadas de la forma de la conexión  $\nabla$ , un sencillo cálculo nos lleva a la siguiente expresión:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial t^B} - \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial t^A} + \Gamma_B^j \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial q^j} - \Gamma_A^j \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial q^j} \right) (dt^A \wedge dt^B) \otimes \frac{\partial}{\partial q^i}. \quad (7.6)$$

#### A. Levantamiento horizontal

A continuación vamos a recordar el levantamiento horizontal de campos de vectores en  $\mathbb{R}^k$  a campos de vectores en  $\mathbb{R}^k \times Q$ . Este concepto será necesario en la sección 7.1.2 para definir la función energía  $E_L^\nabla$ .

Empezamos recordando el concepto de levantamiento horizontal de vectores, por un conexión  $\nabla$ , véase Saunders [125].

**Definición 7.5** Sean  $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k \times Q$  y  $u_{\mathbf{t}} \in T_{\mathbf{t}}\mathbb{R}^k$  entonces el **levantamiento horizontal** de  $u_{\mathbf{t}}$  por la conexión  $\nabla$  en el punto  $(\mathbf{t}, \mathbf{q})$  es el vector tangente

$$\nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(u_{\mathbf{t}}) \in T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q)$$

donde  $\nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}$  se piensa como una aplicación lineal  $T_{\mathbf{t}}\mathbb{R}^k \rightarrow T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q)$ .

**Observación 7.6** Para cada  $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k \times Q$  se verifica que  $\nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}$  es una aplicación lineal

$$\nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} : T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q) \rightarrow T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q).$$

Además  $\nabla$  es  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$ -semibásica, es decir,

$$\nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \in ((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*(T^*\mathbb{R}^k))_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \otimes T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q),$$

por lo que se anula sobre los campos de la forma  $v^i \frac{\partial}{\partial q^i}$  por ello se puede pensar como una aplicación lineal definida en  $T_{\mathbf{t}}\mathbb{R}^k$ , esto es, una aplicación lineal

$$T_{\mathbf{t}}\mathbb{R}^k \rightarrow T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q).$$

◇

En el siguiente lema definimos el levantamiento horizontal de campos de vectores de  $\mathbb{R}^k$  a  $\mathbb{R}^k \times Q$ .

**Lema 7.7** Toda conexión en el fibrado  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  induce un levantamiento horizontal de campos de vectores

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k) & \rightarrow & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q) \\ X & \rightarrow & X^H \end{array}$$

Si  $X$  es un campo de vectores en  $\mathbb{R}^k$  entonces su **levantamiento horizontal**  $X^H$  es el único campo de vectores horizontal que se proyecta en  $X$ , esto es,

$$(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_*(X^H) = X.$$

*Demostración:*

Sea  $\Psi$  una conexión en el fibrado  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$  y supongamos que  $\Psi(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = j_{\mathbf{t}}^1 \phi$  donde  $\phi = (id_{\mathbb{R}^k}, \phi_Q) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$  es una sección de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$  con  $\phi(s) = (s, \phi_Q(s))$  y  $\phi_Q(\mathbf{t}) = q$ .

Consideremos un campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k)$  con expresión local

$$X(s) = X_A(s) \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_s$$

para cada  $s \in \mathbb{R}^k$ . Definimos el levantamiento horizontal de  $X$  a  $\mathbb{R}^k \times Q$  como el campo de vectores  $X^H$  dado por

$$\begin{aligned} X^H(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = \phi_*(\mathbf{t})(X(\mathbf{t})) &= X_A(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} + \frac{\partial(q^i \circ \phi_Q)}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \right) \\ &= X_A(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} + \Gamma_A^i(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \right). \end{aligned} \quad (7.7)$$

A partir de la expresión local de  $X^H$  se observa que este campo de vectores es horizontal, es decir  $\nabla(X^H) = X^H$ .

□

**Observación 7.8** Sean  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k)$  y  $X^H \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  su levantamiento horizontal. Entonces para cada  $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k \times Q$  se verifica que  $X^H(\mathbf{t}, \mathbf{q})$  coincide con el levantamiento horizontal, según la Definición 7.5, del vector  $X(\mathbf{t}) \in T_{\mathbf{t}}\mathbb{R}^k$ .

En efecto, según la definición 7.5 y la expresiones local (7.1) de  $\nabla$  obtenemos que el levantamiento horizontal de  $X(\mathbf{t})$  es

$$\nabla_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(X(\mathbf{t})) = X_A(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} + \Gamma_A^i(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \right) = X^H(\mathbf{t}, \mathbf{q}).$$

◇

**B. Campos de vectores en  $\mathbb{R}^k \times Q$  asociados a una conexión.**

Dada una conexión  $\nabla$  en  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ , consideramos los levantamientos horizontales  $\tilde{Y}_A$  de los generadores globales

$$\frac{\partial}{\partial t^A}$$

de  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^k)$ , de (7.7) sabemos que su expresión local es

$$\tilde{Y}_A := \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right)^H \Big|_{(t, \mathbf{q})} = \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{(t, \mathbf{q})} + \Gamma_A^i(t, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(t, \mathbf{q})}, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (7.8)$$

**Definición 7.9** *Los campos de vectores  $\tilde{Y}_A$  se denominan **campos de vectores asociados a la conexión  $\nabla$** .*

Si  $\nabla_0$  es la *conexión trivial* en  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ , entonces puesto que  $\Gamma_A^i = 0$  los campos de vectores asociados a la conexión  $\nabla_0$  son

$$\left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right)^H \Big|_{(t, \mathbf{q})} = \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{(t, \mathbf{q})}, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (7.9)$$

**Observación 7.10** Los campos de vectores asociados a una conexión  $\nabla$  nos permitirán introducir, en la subsección siguiente, la función energía lagrangiana asociada a la conexión  $\nabla$ .

◇

### 7.1.2. La función energía lagrangiana.

En esta subsección vamos a introducir la función energía lagrangiana,

$$E_L^\nabla : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R},$$

asociada a una conexión  $\nabla$  en  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  y a un lagrangiano  $L$ . Como veremos esta función energía  $E_L^\nabla$  coincide con  $E_L$  cuando  $\nabla$  es la conexión estándar.

Con el fin de introducir la función  $E_L^\nabla$  comenzamos introduciendo algunos objetos geométricos.

Sean  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $J^1 \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$  el fibrado de 1-jets de  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$  y  $\alpha = \alpha_A dt^A$  una 1-forma en  $\mathbb{R}^k$ , entonces, se puede definir la 1-forma vectorial  $S_\alpha$ , (véase Saunders, página 156), que tiene la siguiente expresión local

$$S_\alpha = \alpha_A (dq^i - v_B^i dt^B) \otimes \frac{\partial}{\partial v_A^i} \cdot \leq k.$$

En este capítulo vamos a utilizar los tensores canónicos  $S_{dt^1}, \dots, S_{dt^k}$ , que teniendo en cuenta la expresión anterior se escriben localmente como sigue:

$$S_{dt^A} = (dq^i - v_B^i dt^B) \otimes \frac{\partial}{\partial v_A^i}, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (7.10)$$

Sea  $L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función lagrangiana. A partir de las estructuras geométricas de  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , que hemos definido en el capítulo 6 podemos construir las formas de Poincaré-Cartan y la función energía asociada a  $L$ .

**Definición 7.11** *Las 1-formas de Poincaré-Cartan, asociadas con la función lagrangiana  $L$ , son las 1-formas en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  definidas por*

$$\tilde{\Theta}_L^A := dL \circ S_{dt^A} + \frac{1}{k} L dt^A, \quad 1 \leq A \leq k \quad (7.11)$$

De la expresión local (7.10) de  $S_{dt^A}$  se deduce que la expresión local de  $\tilde{\Theta}_L^A$  es

$$\tilde{\Theta}_L^A := \left( \frac{1}{k} \delta_B^A L - v_B^i \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \right) dt^B + \frac{\partial L}{\partial v_A^i} dq^i. \quad (7.12)$$

y teniendo en cuenta la expresión local (6.22) de  $\theta_L^A$ , esta expresión se puede escribir como sigue:

$$\tilde{\Theta}_L^A = \theta_L^A + \left( \frac{1}{k} \delta_B^A L - v_B^i \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \right) dt^B. \quad (7.13)$$

A continuación vamos a definir la función energía lagrangiana asociada a una conexión  $\nabla$ .

Para introducir esta definición haremos uso de los levantamientos canónicos de campos de vectores de  $\mathbb{R}^k \times Q$  a  $J^1 \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} \equiv \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  que hemos introducido en la sección 6.2.3 y de los cuales recordamos, a continuación, su expresión local.

Sea  $X$  un campo de vectores en  $\mathbb{R}^k \times Q$  con expresión local

$$X = X_A \frac{\partial}{\partial t^A} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

su prolongación ó levantamiento natural a  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  es el campo de vectores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  cuya expresión local es

$$X^1 = X_A \frac{\partial}{\partial t^A} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left( \frac{dX^i}{dt^A} - v_B^j \frac{dX_B}{dt^A} \right) \frac{\partial}{\partial v_A^i}, \quad (7.14)$$



donde  $d/d^A$  denota la derivada total, esto es,

$$\frac{d}{dt^A} = \frac{\partial}{\partial t^A} + v_A^j \frac{\partial}{\partial q^j}.$$

Recordemos que la función energía lagrangiana en la formulación  $k$ -cosimpléctica estándar es  $E_L = \Delta L - L$  con expresión local

$$E_L = v_A^i \frac{\partial L}{\partial v_A^i} - L.$$

*Uno puede también definir intrínsecamente la función energía lagrangiana como sigue.*

Consideremos la conexión trivial  $\nabla_0$ , los campos

$$\tilde{Y}_A = \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right)^H = \frac{\partial}{\partial t^A}, \quad 1 \leq A \leq k$$

asociados a esta conexión y el levantamiento  $\tilde{Y}_A^1$  de cada campo de vectores  $\tilde{Y}_A \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  a  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

A partir de las expresiones locales (7.9) y (7.14) de  $\tilde{Y}_A$  y del levantamiento natural a  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  se obtiene que la expresión local de  $\tilde{Y}_A^1$  es

$$\tilde{Y}_A^1 = \left( \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right)^H \right)^1 = \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right)^1 \equiv \frac{\partial}{\partial t^A}. \quad (7.15)$$

Entonces de la expresión local (7.12) de  $\tilde{\Theta}_L^A$  se deduce que  $E_L$  se puede escribir como sigue:

$$E_L = - \sum_{A=1}^k \iota_{\tilde{Y}_A^1} \tilde{\Theta}_L^A = - \sum_{A=1}^k \iota \frac{\partial}{\partial t^A} \tilde{\Theta}_L^A. \quad (7.16)$$

De este modo se observa que la energía lagrangiana puede obtenerse como la contracción de las 1-formas de Poincaré-Cartan con las prolongaciones a  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  de los campos de vectores asociados a la conexión trivial.

Consideremos ahora una conexión  $\nabla$  distinta de la trivial, en analogía con la expresión de la energía que acabamos de introducir, definimos la energía lagrangiana asociada a una conexión  $\nabla$  y a un lagrangiano  $L$  a partir de los campos de vectores asociados a la conexión,  $\tilde{Y}_A$ , y las 1-formas de Poincaré-Cartan  $\tilde{\Theta}_L^1, \dots, \tilde{\Theta}_L^k$ .

**Definición 7.12** Sean  $\nabla$  una conexión en  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  y  $\tilde{Y}_A \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  los campos de vectores asociados a la conexión  $\nabla$ , esto es,

$$\tilde{Y}_A = \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right)^H, \quad A = 1, \dots, k.$$

Se define la **función energía lagrangiana**  $E_L^\nabla$  asociada con el lagrangiano  $L$  y la conexión  $\nabla$  por

$$E_L^\nabla = - \sum_{A=1}^k \iota_{\tilde{Y}_A} \tilde{\Theta}_L^A, \quad (7.17)$$

donde  $\tilde{Y}_A^1 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$  denota el levantamiento natural de  $\tilde{Y}_A \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$  a  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

Consideremos un sistema local de coordenadas  $(t^A, q^i)$  en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^k \times Q$ . Teniendo en cuenta que los campos de vectores  $\tilde{Y}_A$ ,  $1 \leq A \leq k$  asociados a la conexión  $\nabla$  tienen, en este sistema de coordenadas locales, la expresión local

$$\tilde{Y}_A = \frac{\partial}{\partial t^A} + \Gamma_A^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

entonces, de la expresión local del levantamiento de campos de vectores a  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , (7.14), se obtiene

$$\tilde{Y}_A^1 = \frac{\partial}{\partial t^A} + \Gamma_A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left( \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial t^B} + v_B^j \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial q^j} \right) \frac{\partial}{\partial v_B^i}. \quad (7.18)$$

Así de la expresión local (7.12) de  $\tilde{\Theta}_L^A$  y de (7.18) se obtiene la expresión local de  $E_L^\nabla$ :

$$E_L^\nabla = \sum_{A=1}^k \frac{\partial L}{\partial v_A^i} (v_A^i - \Gamma_A^i) - L. \quad (7.19)$$

## 7.2. Formalismo hamiltoniano $k$ -cosimpléctico con conexiones llanas.

En esta sección mostraremos como la existencia de una conexión con curvatura cero permite la construcción de una nueva estructura  $k$ -cosimpléctica en la variedad  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^* Q$ .

Esta estructura  $k$ -cosimpléctica permite establecer las ecuaciones geométricas similares a las ecuaciones geométricas de Hamilton y además se demuestra que las soluciones en este caso son las mismas que en formalismo hamiltoniano  $k$ -cosimpléctico estándar.

### 7.2.1. Estructura $k$ -cosimpléctica.

Para definir la estructura  $k$ -cosimpléctica en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ , consideramos las proyecciones naturales

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}_2^A: \quad \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q &\rightarrow T^*Q \\ (\mathbf{t}, \alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) &\mapsto \widehat{\pi}_2^A(\mathbf{t}, \alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) = \alpha_{A\mathbf{q}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi_Q: \quad T^*Q &\rightarrow Q \\ \alpha_{\mathbf{q}} &\mapsto \pi_Q(\alpha_{\mathbf{q}}) = q \end{aligned}$$

En la sección 6.1.1.B. hemos definido las 1-formas canónicas  $\theta^A$  como

$$\theta^A = (\widehat{\pi}_2^A)^*\theta, \quad A = 1 \dots, k.$$

Usando la definición de la 1-forma de Liouville  $\theta \in \Lambda^1(T^*Q)$  obtenemos

$$\theta^A(w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})(\widetilde{X}_{w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}}) = \left( \alpha_{A\mathbf{q}} \circ (\pi_Q)_*(\alpha_{A\mathbf{q}}) \circ (\widehat{\pi}_2^A)_*(w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}) \right)(\widetilde{X}_{w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}}),$$

donde

$$w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} = (\mathbf{t}, \alpha_{1\mathbf{q}}, \dots, \alpha_{k\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \quad \text{y} \quad \widetilde{X}_{w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}} \in T_{w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}}(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q),$$

esto es, las 1-formas  $\theta^A$  están definidas a partir de la composición:

$$T_{w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}}(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) \xrightarrow{(\widehat{\pi}_2^A)_*(w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})} T_{\alpha_{A\mathbf{q}}}(T^*Q) \xrightarrow{(\pi_Q)_*(\alpha_{A\mathbf{q}})} T_{\mathbf{q}}Q \xrightarrow{\alpha_{A\mathbf{q}}} \mathbb{R}$$

La conexión  $\nabla$  nos permite construir otra familia de 1-formas en la variedad  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  del siguiente modo:

**Definición 7.13** *La composición*

$$\begin{aligned} T_{w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}}(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) &\xrightarrow{((\widehat{\pi}_Q)_{1,0})_* w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}} T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q) \xrightarrow{v} \\ &\xrightarrow{v} V_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\widehat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \subset T_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}(\mathbb{R}^k \times Q) \xrightarrow{(\widehat{\pi}_Q)_*(\mathbf{t}, \mathbf{q})} T_{\mathbf{q}}Q \xrightarrow{\alpha_{A\mathbf{q}}} \mathbb{R} \end{aligned}$$

define, para cada  $A = 1, 2, \dots, k$ , la 1-forma  $\theta_{\nabla}^A$  en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  dada por

$$\theta_{\nabla}^A(w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})})(\tilde{X}_{w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}}) = \left( \alpha_{A\mathbf{q}} \circ (\hat{\pi}_Q)_*(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \circ v \circ ((\hat{\pi}_Q)_{1,0})_* w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \right) (\tilde{X}_{w_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}}). \quad (7.20)$$

De la expresión local (7.5) de  $v(X)$ , deducimos la expresión local de cada  $\theta_{\nabla}^A$  es

$$\theta_{\nabla}^A = p_i^A dq^i - p_i^A \Gamma_B^i dt^B = p_i^A (dq^i - \Gamma_B^i dt^B). \quad (7.21)$$

Para cada  $A$ , la diferencia

$$\eta_{\nabla}^A := \theta^A - \theta_{\nabla}^A \quad (7.22)$$

es una nueva 1-forma en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  cuya expresión local es

$$\eta_{\nabla}^A = p_i^A \Gamma_B^i dt^B, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (7.23)$$

**Proposición 7.14** *Sea*

$$V = \text{Ker } T(\hat{\pi}_Q)_{1,0}$$

*la distribución vertical del fibrado  $(\hat{\pi}_Q)_{1,0} : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$  y*

$$\omega_{\nabla}^A = -d\theta_{\nabla}^A.$$

*Si  $\nabla$  tiene curvatura 0, entonces  $(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q, dt^A, \omega_{\nabla}^A, V)$  es una variedad  $k$ -cosimpléctica.*

**Demostración:**

Teniendo en cuenta que

$$V = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_i^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_i^k} \right\rangle_{1 \leq i \leq n}$$

entonces las condiciones (1) de la Definición 6.1 se verifican trivialmente.

Probemos que se verifica la condición (2) de dicha definición, esto es,

$$\left( \bigcap_{A=1}^k \ker dt^A \right) \cap \left( \bigcap_{A=1}^k \ker \omega_{\nabla}^A \right) = \{0\} \quad , \quad \dim \left( \bigcap_{A=1}^k \ker \omega_{\nabla}^A \right) = k.$$

Sea  $X$  un campo de vectores con expresión local

$$X = X_A \frac{\partial}{\partial t^A} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i^A \frac{\partial}{\partial p_i^A},$$

con  $X_A, X^i, X_i^A \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q)$ .

Puesto que  $\omega_{\nabla}^A = -d\theta_{\nabla}^A$  a partir de la expresión local (7.21) de  $\theta_{\nabla}^A$  obtenemos

$$\omega_{\nabla}^A = -d(p_i^A(dq^i - \Gamma_B^i dt^B)) = dq^i \wedge dp_i^A + d(p_i^A \Gamma_B^i) \wedge dt^B, \quad (7.24)$$

y así

$$\begin{aligned} \iota_X \omega_{\nabla}^A &= \left( X_C p_i^A \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial t^C} + X^j p_i^A \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial q^j} + X_i^A \Gamma_B^i - X_C p_i^A \frac{\partial \Gamma_C^i}{\partial t^B} \right) dt^B \\ &\quad - \left( X_i^A + X_B p_j^A \frac{\partial \Gamma_B^j}{\partial q^i} \right) dq^i + (X^i - X_B \Gamma_B^i) dp_i^A. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\iota_X \omega_{\nabla}^A = 0, 1 \leq A \leq k$ , si, y sólo si,

$$\begin{aligned} X^i &= X_B \Gamma_B^i, \\ X_i^A &= -X_B p_j^A \frac{\partial \Gamma_B^j}{\partial q^i}, \\ 0 &= X_C p_i^A \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial t^C} + X^j p_i^A \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial q^j} + X_i^A \Gamma_B^i - X_C p_i^A \frac{\partial \Gamma_C^i}{\partial t^B}, \end{aligned}$$

o equivalentemente, si  $X$  está localmente dado por

$$X = X_B \left( \frac{\partial}{\partial t^B} + \Gamma_B^i \frac{\partial}{\partial q^i} - p_j^A \frac{\partial \Gamma_B^j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i^A} \right)$$

y además, las funciones  $X_1, \dots, X_k$  satisfacen las identidades

$$X_B p_j^A \left( \frac{\partial \Gamma_C^j}{\partial t^B} - \frac{\partial \Gamma_B^j}{\partial t^C} + \Gamma_B^i \frac{\partial \Gamma_C^j}{\partial q^i} - \Gamma_C^i \frac{\partial \Gamma_B^j}{\partial q^i} \right) = 0, \quad 1 \leq A, C \leq k. \quad (7.25)$$

Teniendo en cuenta la expresión local (7.25) de la curvatura  $\mathcal{R}_{\nabla}$ , se observa que

$$\frac{\partial \Gamma_C^j}{\partial t^B} - \frac{\partial \Gamma_B^j}{\partial t^C} + \Gamma_B^i \frac{\partial \Gamma_C^j}{\partial q^i} - \Gamma_C^i \frac{\partial \Gamma_B^j}{\partial q^i}$$

son las componentes de la curvatura  $\mathcal{R}$  de la conexión  $\nabla$ , la cual suponemos llana, por lo que las ecuaciones son, en realidad, identidades.

Así  $\bigcap_{A=1}^k \ker \omega_{\nabla}^A$  está generado localmente por la siguiente familia de  $k$  campos de vectores locales independientes

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t^B} + \Gamma_B^i \frac{\partial}{\partial q^i} - p_j^A \frac{\partial \Gamma_B^j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i^A}; 1 \leq B \leq k \right\}$$

y así la segunda condición de (2) de la Definición 6.1 está probada.

Además, si se verifica  $dt^A(X) = 0$ , para todo  $A$ , entonces  $X_A = 0$ , para todo  $A$ , por tanto,

$$\left( \bigcap_{A=1}^k \ker dt^A \right) \cap \left( \bigcap_{A=1}^k \ker \omega_{\nabla}^A \right) = \{0\}.$$

con lo que finalizamos la demostración de este resultado.

□

### 7.2.2. Formalismo hamiltoniano.

En primer lugar, introduciremos la función hamiltoniana  $H^{\nabla}$  asociada con un lagrangiano hiperregular  $L$  y una conexión  $\nabla$  con curvatura cero.

En el caso de la conexión trivial, suponiendo que la función lagrangiana es hiperregular, la función hamiltoniana se define a través de la ecuación

$$E_L = (FL)^* H.$$

Si la conexión no es trivial pero  $L$  es hiperregular introducimos el hamiltoniano  $H^{\nabla}$  como sigue:

**Definición 7.15** La función hamiltoniana asociada al lagrangiano  $L$  y la conexión  $\nabla$  es la función  $H^{\nabla} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q)$  tal que

$$E_L^{\nabla} = (FL)^* H^{\nabla}.$$

Al igual que ocurre cuando consideramos la conexión trivial, la existencia y unicidad de esta función está asegurada, (al menos localmente), si asumimos que el lagrangiano  $L$  es hiperregular (o regular).

Un sencillo cálculo usando las expresiones locales (6.24) y (7.23) de  $FL$  y de las 1-formas  $\eta_{\nabla}^1, \dots, \eta_{\nabla}^k$  nos permite escribir

$$H^{\nabla} = H - \sum_{A=1}^k \eta_{\nabla}^A \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right). \quad (7.26)$$

Ahora, consideramos el formalismo hamiltoniano  $k$ -cosimpléctico en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  con la estructura  $k$ -cosimpléctica

$$(dt^A, \omega_{\nabla}^A, V)$$

y la función hamiltoniana  $H^{\nabla}$ .

Las correspondientes ecuaciones geométricas de Hamilton (6.9) para esta estructura  $k$ -cosimpléctica y este hamiltoniano son

$$\begin{aligned} dt^A(X_B) &= \delta_B^A, \\ \sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega_{\nabla}^A &= dH^{\nabla} - \sum_{A=1}^k R_A^{\nabla}(H^{\nabla}) dt^A, \end{aligned} \quad (7.27)$$

donde  $R_A^{\nabla}$  son los campos de vectores de Reeb asociados a la variedad  $k$ -cosimpléctica  $(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q, dt^A, \omega_{\nabla}^A, V)$ , esto es, los campos de vectores caracterizados por las ecuaciones

$$\iota_{R_A^{\nabla}} dt^B = \delta_A^B, \quad \iota_{R_A^{\nabla}} \omega_{\nabla}^B = 0. \quad (7.28)$$

Consideremos un sistema local de coordenadas  $(t^A, q^i, p_i^A)$  en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  tal que

$$R_A^{\nabla} = (R_A^{\nabla})_B \frac{\partial}{\partial t^B} + (R_A^{\nabla})^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (R_A^{\nabla})_i^B \frac{\partial}{\partial p_i^B}$$

para ciertas funciones  $(R_A^{\nabla})_B, (R_A^{\nabla})^i, (R_A^{\nabla})_i^B \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q)$  entonces, las ecuaciones (7.28) que definen los campos de Reeb son equivalentes a las ecuaciones

$$(R_A^{\nabla})^B = \delta_A^B, \quad (R_A^{\nabla})^i = \Gamma_A^i, \quad (R_A^{\nabla})_i^B = -p_j^B \frac{\partial \Gamma_A^j}{\partial q^i} \quad (7.29)$$

y

$$p_j^B \left( \frac{\partial \Gamma_C^j}{\partial t^A} - \frac{\partial \Gamma_A^j}{\partial t^C} + \Gamma_A^i \frac{\partial \Gamma_C^j}{\partial q^i} - \Gamma_C^i \frac{\partial \Gamma_A^j}{\partial q^i} \right) = 0, \quad (7.30)$$

para todo  $1 \leq A, B, C \leq k$ .

Ahora bien, teniendo en cuenta que la curvatura de  $\nabla$ , (7.25), es cero, la ecuación (7.30) se verifica, por lo que los campos de vectores de Reeb quedan caracterizados por tener la siguiente expresión local

$$R_A^\nabla = \frac{\partial}{\partial t^A} + \Gamma_A^i \frac{\partial}{\partial q^i} - p_j^B \frac{\partial \Gamma_A^j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i^B}. \quad (7.31)$$

**Proposición 7.16** *Sea  $\nabla$  una conexión en el fibrado trivial  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Si  $\nabla$  es una conexión llana entonces las ecuaciones geométricas de Hamilton (6.9) y (7.27), correspondientes a  $H$  y  $H^\nabla$  respectivamente, tienen las mismas soluciones.*

*Demostración:*

Consideremos un sistema local de coordenadas tal que cada  $X_A$  se escribe como sigue:

$$X_A = (X_A)_B \frac{\partial}{\partial t^B} + (X_A)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_A)_i^B \frac{\partial}{\partial p_i^B},$$

donde  $(X_A)_B, (X_A)^i, (X_A)_i^B \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q)$ .

Supongamos que  $(X_1, \dots, X_k)$  es solución de las ecuaciones geométricas (7.27), entonces, las ecuaciones  $dt^A(X_B) = \delta_B^A$  equivalen a

$$(X_A)_B = \delta_B^A, \quad 1 \leq A, B \leq k. \quad (7.32)$$

Entonces, los campos  $X_A$  se escriben:

$$X_A = \frac{\partial}{\partial t^A} + (X_A)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (X_A)_i^B \frac{\partial}{\partial p_i^B}. \quad (7.33)$$

A partir de esta expresión local de  $X_A$  y de la expresión local (7.24) de  $\omega_\nabla^A$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k \iota_{X_A} \omega_\nabla^A &= \left( p_i^A \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial t^A} + p_i^A (X_A)^j \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial q^j} + (X_A)_i^A \Gamma_B^i - p_i^A \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial t^B} \right) dt^B \\ &\quad - \left( (X_A)_i^A + p_j^A \frac{\partial \Gamma_A^j}{\partial q^i} \right) dq^i + ((X_A)^i - \Gamma_A^i) dp_i^A. \end{aligned} \quad (7.34)$$



Por otra parte, un sencillo cálculo en coordenadas locales a partir de las expresiones locales (7.23), (7.26), (7.31) y (7.33) de  $\eta_{\nabla}^A$ ,  $H^{\nabla}$ ,  $R_A^{\nabla}$  y  $X_A$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} dH^{\nabla} - \sum_{A=1}^k R_A^{\nabla}(H^{\nabla})dt^A &= \left( \Gamma_B^i p_j^A \frac{\partial \Gamma_A^j}{\partial q^i} - \Gamma_B^i \frac{\partial H}{\partial q^i} + p_j^A \frac{\partial \Gamma_B^j}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i^A} - p_j^A \frac{\partial \Gamma_B^j}{\partial q^i} \Gamma_A^i \right) dt^B \\ &+ \left( \frac{\partial H}{\partial q^i} - p_j^A \frac{\partial \Gamma_A^j}{\partial q^i} \right) dq^i + \left( \frac{\partial H}{\partial p_i^A} - \Gamma_A^i \right) dp_i^A, \end{aligned} \quad (7.35)$$

donde  $H : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  denota la función hamiltoniana asociada a la conexión estándar, (recordemos que por (7.26) se verifica  $H^{\nabla} = H + \eta_{\nabla}^A(\frac{\partial}{\partial t^A})$ )

Entonces, de (7.32), (7.34) y (7.35) se obtiene que  $(X_1 \dots, X_k)$  es solución de las ecuaciones (7.27) si, y sólo si,

$$\begin{aligned} p_i^A \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial t^A} + p_i^A (X_A)^j \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial q^j} + (X_A)_i^A \Gamma_B^i - p_i^A \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial t^B} &= \Gamma_B^i p_j^A \frac{\partial \Gamma_A^j}{\partial q^i} - \Gamma_B^i \frac{\partial H}{\partial q^i} \\ &+ p_j^A \frac{\partial \Gamma_B^j}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i^A} - p_j^A \frac{\partial \Gamma_B^j}{\partial q^i} \Gamma_A^i, \\ (X_A)_B &= \delta_B^A, \\ \sum_{A=1}^k (X_A)_i^A &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \\ (X_A)^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i^A}. \end{aligned}$$

Sustituyendo las tres últimas ecuaciones en la primera y simplificando se llega al siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales, equivalente al anterior:

$$\begin{aligned} p_i^A \left( \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial t^A} - \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial t^B} + \Gamma_A^j \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial q^j} - \Gamma_B^j \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial q^j} \right) &= 0, \\ (X_A)_B &= \delta_B^A, \\ \sum_{A=1}^k (X_A)_i^A &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \\ (X_A)^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i^A}. \end{aligned}$$

Por último, teniendo en cuenta que estamos considerando conexiones llanas (esta condición era necesaria para garantizar la existencia de una estructura  $k$ -cosimpléctica), la primera de las ecuaciones se verifica trivialmente. Por lo tanto,  $(X_1, \dots, X_k)$  es una solución de las ecuaciones geométricas hamiltonianas (7.27) si, y sólo si,

$$(X_A)^B = \delta_B^A \quad , \quad (X_A)^i = \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \quad \text{y} \quad \sum_{A=1}^k (X_A)_i^A = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Comparando esta condición con las ecuaciones (6.10) que caracterizan los campos de  $k$ -vectores solución de las ecuaciones geométricas de Hamilton (6.9) asociadas a la conexión estándar, obtenemos el resultado buscado.

□

**Observación 7.17** A lo largo de esta sección hemos demostrado que toda conexión llana induce una estructura  $k$ -cosimpléctica en la que desarrollamos la formulación  $k$ -cosimpléctica vista en el capítulo anterior. La condición que se está imponiendo de que la conexión tenga curvatura cero se verifica de modo trivial en la Mecánica dado que la distribución horizontal es de dimensión uno, y por tanto involutiva.

◇

### 7.3. Formalismo lagrangiano $k$ -cosimpléctico con conexiones llanas.

En esta sección, de modo similar a como ocurría en el caso hamiltoniano, demostraremos como la existencia de una conexión con curvatura cero y de un lagrangiano  $L: \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  permite la construcción de una nueva estructura  $k$ -cosimpléctica en la variedad  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)Q$ .

Esta estructura  $k$ -cosimpléctica permite establecer las ecuaciones geométricas similares a las ecuaciones de Euler-Lagrange que hemos visto en el capítulo precedente y además se demuestra que las soluciones en este caso son las mismas que en formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico estándar, de modo análogo al caso hamiltoniano.

### 7.3.1. Estructura $k$ -cosimpléctica.

Comenzamos esta sección introduciendo un endomorfismo vertical en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  asociado a una conexión  $\nabla$ . Cuando consideramos la conexión trivial este endomorfismo coincide con el endomorfismo vertical  $S^A$  introducido en la sección 6.2.1.C.

En primer lugar, tenemos los siguientes difeomorfismos naturales:

- (1) Un difeomorfismo entre  $J^1 \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} = \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  y  $(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*(T^*\mathbb{R}^k) \otimes (\hat{\pi}_Q)^*(TQ)$ , que son dos fibrados vectoriales sobre  $\mathbb{R}^k \times Q$ .

Recordemos que el fibrado  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$  fue introducido en la sección 6.2.1 del capítulo anterior.

Por otra parte,

$$(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*(T^*\mathbb{R}^k) \otimes (\hat{\pi}_Q)^*(TQ) \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$$

es el fibrado producto tensor de

$$((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*(T^*\mathbb{R}^k), (\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*(\pi_Q), \mathbb{R}^k \times Q)$$

y

$$((\hat{\pi}_Q)^*(TQ), (\hat{\pi}_Q)^*\tau_Q, \mathbb{R}^k \times Q)$$

siendo  $\hat{\pi}_Q : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow Q$  un fibrado vectorial.

Un elemento del espacio total del fibrado producto tensor que estamos considerando se puede escribir, en coordenadas, de la forma:

$$f_A^i \left( dt^A \otimes \frac{\partial}{\partial q^i} \right) \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}.$$

Podemos establecer un difeomorfismo natural entre los fibrados

$$J^1 \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} = \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \quad \text{y} \quad (\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*(T^*\mathbb{R}^k) \otimes (\hat{\pi}_Q)^*(TQ),$$

el cual está definido como sigue:

$$(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*(T^*\mathbb{R}^k) \otimes (\hat{\pi}_Q)^*(TQ) \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$$

dado por

$$f_A^i \left( dt^A \otimes \frac{\partial}{\partial q^i} \right) \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \longmapsto (\mathbf{t}, f_1^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}}, \dots, f_k^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\mathbf{q}})$$

(2) Consideramos el difeomorfismo

$$(\hat{\pi}_Q)^*(TQ) \longrightarrow V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}),$$

ya que  $\hat{\pi}_Q : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow Q$  es un fibrado vectorial.

(3) Como consecuencia de (1) y (2) obtenemos el difeomorfismo siguiente:

$$((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0})^*(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) \simeq ((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0})^*((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*(T^*\mathbb{R}^k) \otimes V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})),$$

donde  $(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0} : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$ . En efecto,

$$\begin{aligned} ((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0})^*(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) &\simeq ((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0})^*((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*(T^*\mathbb{R}^k) \otimes (\hat{\pi}_Q)^*(TQ)) \\ &\simeq ((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0})^*((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*(T^*\mathbb{R}^k) \otimes V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})). \end{aligned}$$

De modo que los elementos de  $((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0})^*(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$  se identifican con elementos de la forma

$$(\mathbf{t}, f_1^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}, \dots, f_k^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{q})}).$$

Así tenemos de modo natural el difeomorfismo

$$V((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0}) \simeq ((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0})^*((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*(T^*\mathbb{R}^k) \otimes V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}))$$

entre dos fibrados vectoriales sobre  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

Asociada a los difeomorfismos anteriores, en particular al último que hemos establecido, existe una sección  $V$  de

$$((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0})^*((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*(T^*\mathbb{R}^k) \otimes V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*) \otimes V((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0}) \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q.$$

En coordenadas naturales tenemos

$$V = \frac{\partial}{\partial t^A} \otimes \zeta^i \otimes \frac{\partial}{\partial v_A^i}$$

donde  $\{\zeta^i, i = 1, \dots, n\}$  es una base de secciones de  $V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^* \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$ , dual de la base local  $\{\partial/\partial q^i\}$ .

Observemos que, a pesar de que  $V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$  es un subfibrado de  $T(\mathbb{R}^k \times Q)$ ,  $V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^*$  no es un subfibrado de  $T^*(\mathbb{R}^k \times Q)$ , a menos que consideremos una conexión en el fibrado  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

En efecto, sea  $\nabla$  tal conexión.  $\nabla$  induce la descomposición

$$T(\mathbb{R}^k \times Q) = H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}) \oplus V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}),$$

por lo que tenemos la proyección vertical inducida

$$v = id - \nabla : T(\mathbb{R}^k \times Q) \longrightarrow V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$$

y la inclusión

$${}^t v : V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})^* \longrightarrow T^*(\mathbb{R}^k \times Q).$$

En coordenadas locales naturales, si

$$\nabla = dt^A \otimes \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + \Gamma_A^i \frac{\partial}{\partial q^i} \right)$$

entonces

$$v \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right) = -\Gamma_A^i \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad v \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right) = \frac{\partial}{\partial q^i}$$

y

$${}^t v(\zeta^i) = dq^i - \Gamma_B^i dt^B.$$

Así, la conexión  $\nabla$  actúa en la sección  $V$  obteniendo

$$S_{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t^A} \otimes (dq^i - \Gamma_B^i dt^B) \otimes \frac{\partial}{\partial v_A^i}$$

haciendo de  $S_{\nabla}$  una sección de

$$((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0})^* (\pi_{\mathbb{R}^k}^* T\mathbb{R}^k \otimes T^*(\mathbb{R}^k \times Q)) \otimes V((\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0}) \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q.$$

Ahora definimos los tensores  $S_{\nabla}^A$ ,  $A = 1, \dots, k$  como sigue:

$$S_{\nabla}^A := S_{\nabla}(dt^A) = (dq^i - \Gamma_B^i dt^B) \otimes \frac{\partial}{\partial v_A^i}. \quad (7.36)$$

**Observación 7.18** De (7.36) observamos que si  $\nabla$  es la conexión trivial entonces  $S_{\nabla}^A = S^A$ .

◇

A continuación vamos a introducir, a partir de  $S_{\nabla}$ , las 2-formas  $(\omega_L)_{\nabla}^1, \dots, (\omega_L)_{\nabla}^k$  que formarán parte de la estructura  $k$ -cosimpléctica que definiremos en esta sección.

En el formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico estándar hemos definido las formas lagrangianas por

$$\theta_L^A = dL \circ S^A, \quad A = 1 \dots, k.$$

Puesto que ahora tenemos una conexión  $\nabla$  y los endomorfismos  $S_{\nabla}^A$ , definimos, de modo análogo, las 1-formas  $(\theta_L)_{\nabla}^A$  en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  como sigue:

$$(\theta_L)_{\nabla}^A = dL \circ S_{\nabla}^A, \quad 1 \leq A \leq k,$$

las cuales tienen la siguiente expresión local

$$(\theta_L)_{\nabla}^A = \frac{\partial L}{\partial v_A^i} (dq^i - \Gamma_B^i dt^B), \quad 1 \leq A \leq k. \quad (7.37)$$

Definimos en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  las 2-formas,

$$(\omega_L)_{\nabla}^A = -d(\theta_L)_{\nabla}^A.$$

La expresión local de las 2-formas  $(\omega_L)_{\nabla}^A$  es la siguiente,

$$(\omega_L)_{\nabla}^A = dq^i \wedge d \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \right) + d \left( \Gamma_B^i \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \right) \wedge dt^B \quad (7.38)$$

**Observación 7.19** Recordemos que en caso estándar se verifica  $(FL)^* \theta^A = \theta_L^A$ . De modo análogo, en este caso se demuestra que

$$(\theta_L)_{\nabla}^A = (FL)^* \theta_{\nabla}^A, \quad A = 1 \dots, k,$$

como consecuencia de las expresiones locales (6.24), (7.21) y (7.37) de  $FL$ ,  $\theta_{\nabla}^A$  y  $(\theta_L)_{\nabla}^A$ . Como consecuencia de la identidad anterior también se verifica que

$$(\omega_L)_{\nabla}^A = (FL)^* (\omega_{\nabla}^A).$$

De un largo, pero sencillo cálculo, análogo al de la demostración de la Proposición 7.14, obtenemos el siguiente resultado que nos garantiza la existencia de una estructura  $k$ -cosimpléctica en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  asociada a cada conexión  $\nabla$  en  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  y a cada lagrangiano  $L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposición 7.20** *Sea  $L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano regular, y sea  $V$  la distribución vertical del fibrado  $(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0} : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$ . Si  $\nabla$  es una conexión llana entonces  $(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q, dt^A, (\omega_L)_\nabla^A, V)$  es una variedad  $k$ -cosimpléctica.*

*Demostración:*

Esta demostración es análoga a la de la Proposición 7.16.

□

### 7.3.2. Formalismo lagrangiano con conexiones llanas.

Al igual que en las secciones precedentes, partimos de una conexión  $\nabla$  en el fibrado trivial  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  y además, suponemos que la conexión  $\nabla$  es llana, esto es, su curvatura se anula.

Ahora vamos a desarrollar la formulación  $k$ -cosimpléctica en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  definida por la estructura  $k$ -cosimpléctica  $(dt^A, (\omega_L)_\nabla^A, V)$ , es decir, vamos a considerar el *formalismo lagrangiano* en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  reemplazando  $E_L$  por  $E_L^\nabla$  y  $\omega_L^A$  por  $(\omega_L)_\nabla^A$ .

#### A. Campos de Reeb.

Las ecuaciones,

$$\iota_{(R_L)_A^\nabla} dt^B = \delta_A^B, \quad \iota_{(R_L)_A^\nabla} (\omega_L)_\nabla^B = 0, \quad 1 \leq A, B \leq k, \quad (7.39)$$

definen los campos de vectores de Reeb en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  correspondientes a la estructura  $k$ -cosimpléctica  $(dt^A, (\omega_L)_\nabla^A, V)$ .

Mediante un cálculo en coordenadas locales y suponiendo que  $(R_L)_A^\nabla$  está localmente dado por:

$$(R_L)_A^\nabla = [(R_L)_A^\nabla]_B \frac{\partial}{\partial t^B} + [(R_L)_A^\nabla]^i \frac{\partial}{\partial q^i} + [(R_L)_A^\nabla]_B^i \frac{\partial}{\partial v_B^i},$$

con  $[(R_L)_A^\nabla]_B, [(R_L)_A^\nabla]^i, [(R_L)_A^\nabla]^i_B \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$ , obtenemos que las ecuaciones (7.39), que definen los campos de Reeb, son equivalentes a las identidades

$$[(R_L)_A^\nabla]^B = \delta_A^B, \quad [(R_L)_A^\nabla]^i = \Gamma_A^i, \quad (7.40)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v_C^k} + \Gamma_A^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_C^k} + \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial q^k} \frac{\partial L}{\partial v_C^i} + [(R_L)_A^\nabla]^i_B \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^i \partial v_C^k} = 0 \quad (7.41)$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial v_B^j} \left( \frac{\partial \Gamma_C^j}{\partial t^A} - \frac{\partial \Gamma_A^j}{\partial t^C} + \Gamma_A^i \frac{\partial \Gamma_C^j}{\partial q^i} - \Gamma_C^i \frac{\partial \Gamma_A^j}{\partial q^i} \right) = 0, \quad (7.42)$$

para todo  $1 \leq A, B, C \leq k$ .

Ahora bien, teniendo en cuenta que, por hipótesis, la curvatura (7.25) de la conexión es cero, la ecuación (7.42) se verifica trivialmente y por tanto, la expresión local de los campos de Reeb es, en este caso

$$(R_L)_A^\nabla = \frac{\partial}{\partial t^A} + \Gamma_A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + [(R_L)_A^\nabla]^i_B \frac{\partial}{\partial v_B^i}, \quad (7.43)$$

donde las funciones  $[(R_L)_A^\nabla]^i_B$  verifican la ecuación (7.41).

**Observación 7.21** En lo que se refiere a la existencia de los campos de Reeb  $(R_L)_1^\nabla, \dots, (R_L)_k^\nabla$  podemos afirmar lo siguiente: por ser el lagrangiano  $L$  regular, de la ecuación (7.41) podemos definir, en un entorno de cada punto, un campo de  $k$ -vectores que verifica (7.39). Posteriormente puede construirse un campo de  $k$ -vectores global  $(R_L)^\nabla = ((R_L)_1^\nabla, \dots, (R_L)_k^\nabla)$ , el cual es solución de (7.39), usando particiones de la unidad.

B. Ecuaciones geométricas de Euler-Lagrange asociadas a una conexión llana

En la sección 6.1.2 del capítulo 6, hemos descrito la formulación Hamiltoniana  $k$ -cosimpléctica de las teorías clásicas de campos, sobre cualquier variedad  $k$ -cosimpléctica.

En la subsección anterior hemos visto como cada conexión llana  $\nabla$  nos permite dotar a la variedad  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  de una estructura  $k$ -cosimpléctica dependiente, al menos “*a priori*” de dicha conexión.



De este modo, escribiendo las ecuaciones geométricas de Hamilton (6.9) para la estructura  $k$ -cosimpléctica  $(dt^A, (\omega_L)_\nabla^A, V)$  y reemplazando  $H$  por  $E_L^\nabla$ , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} dt^A(Y_B) &= \delta_B^A, \\ \sum_{A=1}^k \iota_{Y_A}(\omega_L)_\nabla^A &= dE_L^\nabla - \sum_{A=1}^k (R_L)_A^\nabla (E_L^\nabla) dt^A, \end{aligned} \quad (7.44)$$

para algún campo de  $k$ -vectores  $(Y_1, \dots, Y_k)$ .

**Proposición 7.22** *Sea  $L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano regular. Si la conexión  $\nabla$  tiene curvatura cero entonces las ecuaciones geométricas de Euler-Lagrange (6.43) y (7.44) asociadas la conexión estándar y a la conexión  $\nabla$ , respectivamente, tienen las mismas soluciones.*

*Demostración:*

Supongamos que cada  $Y_A$  se escribe localmente como sigue:

$$Y_A = [Y_A]_B \frac{\partial}{\partial t^B} + [Y_A]^i \frac{\partial}{\partial q^i} + [Y_A]_B^i \frac{\partial}{\partial v_A^i}$$

para ciertas funciones  $[Y_A]_B, [Y_A]^i, [Y_A]_B^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$ .

A partir de un cálculo en coordenadas locales, análogo al desarrollado en la Sección 7.2.2, y utilizando la regularidad del lagrangiano  $L$ , así como las expresiones locales (7.38), (7.41) y (7.43) de  $(\omega_L)_\nabla^A$  y  $(R_L)_A^\nabla$  deducimos que  $(Y_1, \dots, Y_k)$  es solución de (7.44) si, y sólo si

$$[Y_A]_B = \delta_A^B, \quad [Y_A]^i = v_A^i, \quad \sum_{A=1}^k Y_A \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^k}$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial v_A^i} \left( \frac{\partial \Gamma_C^i}{\partial t^A} + \Gamma_A^j \frac{\partial \Gamma_C^i}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial t^C} - \Gamma_C^j \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial q^j} \right) = 0. \quad (7.45)$$

Además teniendo en cuenta que la curvatura de la conexión es cero y que

$$\frac{\partial \Gamma_C^i}{\partial t^A} + \Gamma_A^j \frac{\partial \Gamma_C^i}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial t^C} - \Gamma_C^j \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial q^j}$$

son las componentes de la curvatura, (7.25), obtenemos que la ecuación (7.45) se verifica trivialmente y por tanto  $(Y_1, \dots, Y_k)$  es solución de (7.44) si, y sólo si

$$[Y_A]_B = \delta_A^B, \quad [Y_A]^i = v_A^i, \quad \sum_{A=1}^k Y_A \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^k}. \quad (7.46)$$

Obsérvese que las ecuaciones (6.42) que caracterizan los campos de  $k$ -vectores lagrangianos coinciden con las ecuaciones (7.46). Así obtenemos el resultado del enunciado.

□

**Observación 7.23** Si reescribimos las Propositiones 7.16 y 7.22 en el caso particular  $k = 1$ , obtenemos los resultados relativos a Mecánica Autónoma con conexiones no-estándar de recogidos en A. Echeverría-Enríquez *et al.* [34].

◇

## 7.4. Equivalencia entre los principios variacionales: caracterización de la energía.

Consideremos la función energía lagrangiana  $E_L^\nabla$  asociada a una conexión  $\nabla$  en el fibrado trivial  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}: \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  y a un lagrangiano  $L: \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$ .

En esta sección demostraremos que esta función  $E_L^\nabla$  establece la equivalencia entre los principios variacionales asociados a la formulación  $k$ -cosimpléctica lagrangiana y hamiltoniana, esto es, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de soluciones de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (6.6) y el conjunto de soluciones de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (6.34).

### 7.4.1. Elementos geométricos.

Comenzamos esta sección introduciendo algunos objetos geométricos que necesitaremos a lo largo de la misma.

A partir de las 1-formas en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$

$$\theta^A = (\hat{\pi}_2^A)^* \theta, \quad \theta_{\nabla}^A \text{ y } \eta_{\nabla}^A = \theta^A - \theta_{\nabla}^A$$

construimos las siguientes  $k$ -formas en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$

$$\theta = \sum_{A=1}^k \theta^A \wedge d^{k-1}t^A, \quad \theta_{\nabla} = \sum_{A=1}^k \theta_{\nabla}^A \wedge d^{k-1}t^A, \quad \eta_{\nabla} = \sum_{A=1}^k \eta_{\nabla}^A \wedge d^{k-1}t^A,$$

y

$$\Theta = \theta - Hd^k t, \quad \Theta_{\nabla} = \theta_{\nabla} - H^{\nabla} d^k t,$$

donde  $d^k t = dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k$  es el elemento de volumen en  $\mathbb{R}^k$  y

$$d^{k-1}t^A = \iota_{\frac{\partial}{\partial t^A}} d^k t.$$

Recordemos que la forma  $\Theta$  ya fue introducida en (6.4) para desarrollar el principio variacional que nos proporciona las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl.

Por último, con las 1-formas

$$\tilde{\Theta}_L^A = dL \circ S_{dt^A} + \frac{1}{k} L dt^A$$

que hemos definido en (7.11) construimos la  $k$ -forma  $\tilde{\Theta}_L$  en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  como sigue

$$\tilde{\Theta}_L := \sum_{A=1}^k \tilde{\Theta}_L^A \wedge d^{k-1}t^A.$$

En la siguiente proposición se establecen algunas de las propiedades que verifican estas  $k$ -formas:

**Proposición 7.24** *Se verifican las siguientes relaciones:*

- (1)  $\tilde{\Theta}_L = (FL)^* \Theta.$
- (2)  $\theta - \theta_{\nabla} = \eta_{\nabla} = (H - H^{\nabla}) d^k t.$
- (3)  $(FL)^* \theta_{\nabla} = \tilde{\Theta}_L + E_L^{\nabla} d^k t.$

*Demostración:*

(1) Dado que  $(FL)^*\theta^A = \theta_L^A$  obtenemos

$$\begin{aligned} (FL)^*\Theta &= (FL)^*(\theta - Hd^k t) = (FL)^*\left(\sum_{A=1}^k \theta^A \wedge d^{k-1}t^A - Hd^k t\right) \\ &= \sum_{A=1}^k (FL)^*\theta^A \wedge d^{k-1}t^A - (FL)^*Hd^k t = \sum_{A=1}^k \theta_L^A \wedge d^{k-1}t^A - E_L d^k t. \end{aligned}$$

Por otra parte, de (7.13) se sigue,

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_L &= \sum_{A=1}^k \tilde{\Theta}_L^A \wedge d^{k-1}t^A = \sum_{A=1}^k \left( \theta_L^A + \left( \frac{1}{k} \delta_B^A L - v_B^i \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \right) dt^B \right) \wedge d^{k-1}t^A \\ &= \sum_{A=1}^k \theta_L^A \wedge d^{k-1}t^A + \sum_{A=1}^k \left( \frac{1}{k} \delta_B^A L - v_B^i \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \right) dt^B \wedge d^{k-1}t^A \\ &= \sum_{A=1}^k \theta_L^A \wedge d^{k-1}t^A + Ld^k t - v_A^i \frac{\partial L}{\partial v_A^i} d^k t \\ &= \sum_{A=1}^k \theta_L^A \wedge d^{k-1}t^A - E_L d^k t \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\tilde{\Theta}_L = (FL)^*\Theta$ .

(2) La primera igualdad es consecuencia de  $\theta^A - \theta_{\nabla}^A = \eta_{\nabla}^A$ ,  $A = 1, \dots, k$ .

Para la segunda igualdad, consideramos la expresión local (7.23) de  $\eta_{\nabla}^A$  y teniendo en cuenta que por (7.26) se verifica

$$H^{\nabla} = H - \sum_{A=1}^k \eta_{\nabla}^A \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right)$$

obtenemos

$$\eta_{\nabla} = \sum_{A=1}^k \eta_{\nabla}^A \wedge d^{k-1}t^A = p_i^A \Gamma_B^i dt^B \wedge d^{k-1}t^A = \left[ \sum_{A=1}^k \eta_{\nabla}^A \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right) \right] d^k t = (H - H^{\nabla}) d^k t$$

(3) De 1 y 2 se sigue,

$$\begin{aligned} (FL)^*\theta_{\nabla} - \tilde{\Theta}_L &= (FL)^*\theta_{\nabla} - (FL)^*\Theta = (FL)^*(\theta_{\nabla} - \Theta) \\ &= (FL)^*(\theta_{\nabla} - \theta + \theta - \Theta) = (FL)^*((H^{\nabla} - H)d^k t + Hd^k t) \\ &= (FL)^*(H^{\nabla}d^k t) = E_L^{\nabla}d^k t, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la definición de  $H^{\nabla}$ , esto es,  $(FL)^*(H^{\nabla}) = E_L^{\nabla}$ .

□

### 7.4.2. Caracterización de la energía.

**Lema 7.25** Sean  $\beta$  una  $k$ -forma y  $f$  una función en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ . Para cada aplicación  $\phi_Q : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$ , con soporte compacto y donde  $U$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^k$ , las siguientes condiciones son equivalentes:

$$(i) \quad (\phi_Q^{[1]})^*(f d^k t) = (\phi_Q^{[1]})^*\beta.$$

$$(ii) \quad \int_{\phi_Q^{[1]}(U)} f d^k t = \int_{\phi_Q^{[1]}(U)} \beta.$$

Recordemos que  $\phi_Q^{[1]} : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  denota la primera prolongación de  $\phi_Q$ .

*Demostración:*

Trivialmente  $(i) \Rightarrow (ii)$  ya que

$$\int_{\phi_Q^{[1]}(U)} f d^k t = \int_U (\phi_Q^{[1]})^*(f d^k t) = \int_U (\phi_Q^{[1]})^*\beta = \int_{\phi_Q^{[1]}(U)} \beta.$$

Recíprocamente, si  $(i)$  no es cierto, entonces existe una aplicación

$$\phi_Q : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$$

tal que

$$(\phi_Q^{[1]})^*(f d^k t - \beta) \neq 0$$

y por tanto existe  $s \in U$  y un entorno cerrado  $V$  de  $s$  tal que, considerando

$$\psi = \phi_Q|_V : V \rightarrow Q$$

entonces

$$\int_{\psi^{[1]}(V)} (f d^k t - \beta) \neq 0,$$

así (ii) es falso.

□

**Proposición 7.26** *La función energía lagrangiana  $E_L^\nabla$  introducida en la Definición 7.12 es la única función definida en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  que cumple la condición*

$$(\phi_Q^{[1]})^*(E_L^\nabla d^k t) = (\phi_Q^{[1]})^*((FL)^* \theta_\nabla - L d^k t)$$

para cada aplicación  $\phi_Q : U \rightarrow Q$ .

*Demostración:*

Unicidad: Sean  $f$  y  $g$  dos funciones verificando la condición del enunciado. Trivialmente se verifica que

$$0 = (\phi_Q^{[1]})^*((f - g) d^k t) = ((f - g) \circ \phi_Q^{[1]}) d^k t$$

entonces

$$0 = (f - g) \circ \phi_Q^{[1]}(\mathbf{t}) = (f - g)(j_{\mathbf{t}}^1 \phi),$$

donde  $\phi = (id_{\mathbb{R}^k}, \phi_Q)$ .

La última igualdad implica que  $f - g = 0$ , ya que cada punto de  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \equiv J^1 \hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}$  es de la forma  $j_{\mathbf{t}}^1 \phi$ .

Existencia: Del ítem (3) en la Proposición 7.24 obtenemos

$$\begin{aligned} (FL)^* \theta_\nabla - L d^k t &= \tilde{\Theta}_L + E_L^\nabla d^k t - L d^k t = \sum_{A=1}^k \tilde{\Theta}_L^A \wedge d^{k-1} t^A + E_L^\nabla d^k t - L d^k t \\ &= \sum_{A=1}^k (dL \circ S_{dt^A} + \frac{1}{k} L dt^A) \wedge d^{k-1} t^A + E_L^\nabla d^k t - L d^k t \\ &= \sum_{A=1}^k dL \circ S_{dt^A} \wedge d^{k-1} t^A + E_L^\nabla d^k t \end{aligned}$$

Entonces

$$(\phi_Q^{[1]})^*((FL)^*\theta_\nabla - Ld^k t) = (\phi_Q^{[1]})^*\left(\sum_{A=1}^k dL \circ S_{dt^A} \wedge d^{k-1}t^A + E_L^\nabla d^k t\right) = (\phi_Q^{[1]})^*(E_L^\nabla d^k t)$$

donde hemos utilizado la igualdad

$$(\phi_Q^{[1]})^*\left(\sum_{A=1}^k dL \circ S_{dt^A} \wedge d^{k-1}t^A\right) = 0, \quad (7.47)$$

que demostramos a continuación.

Veamos que (7.47) se verifica. De la expresión local (7.10) de  $S_{dt^A}$ , tenemos

$$dL \circ S_{dt^A} = \frac{\partial L}{\partial v_A^i} (dq^i - v_B^i dt^B)$$

entonces

$$\sum_{A=1}^k (dL \circ S_{dt^A} \wedge d^{k-1}t^A) = \sum_{A=1}^k \frac{\partial L}{\partial v_A^i} (dq^i - v_B^i dt^B) \wedge d^{k-1}t^A$$

pero, por otra parte

$$\begin{aligned} & (\phi_Q^{[1]})^* \left( \sum_{A=1}^k \frac{\partial L}{\partial v_A^i} (dq^i - v_B^i dt^B) \wedge d^{k-1}t^A \right) \\ &= \sum_{A=1}^k \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \circ \phi_Q^{[1]} \right) \left( d(q^i \circ \phi_Q^{[1]}) - (v_B^i \circ \phi_Q^{[1]}) d(t^B \circ \phi_Q^{[1]}) \right) \wedge d^{k-1}(t^A \circ \phi_Q^{[1]}) \\ &= \sum_{A=1}^k \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \circ \phi_Q^{[1]} \right) \left( \frac{\partial(q^i \circ \phi_Q)}{\partial t^B} dt^B - \frac{\partial(q^i \circ \phi_Q)}{\partial t^B} dt^B \right) \wedge d^{k-1}t^A = 0, \end{aligned}$$

obteniendo así la identidad (7.47).

□

### 7.4.3. Equivalencia entre los principios variacionales.

Los resultados que se han ido desarrollando a lo largo del capítulo, y en especial la última proposición que se ha demostrado, nos permiten mostrar la equivalencia

entre los principios variacionales que nos proporcionan las ecuaciones de Hamilton-De Donder - Weyl y de Euler-Lagrange, recordemos que estos dos principios variacionales han sido desarrollados en las secciones 6.1.2.B y 6.2.3.B, respectivamente. Además vamos a ver, utilizando la Proposición 7.26, que una vez que hemos elegido una conexión  $\nabla$ , la función energía,  $E_L^\nabla$ , es la única función que establece dicha equivalencia.

Del Lema 7.25 y la Proposición 7.26 deducimos que para cada  $\phi_Q : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  con soporte compacto, se verifica

$$\int_{\phi_Q^{[1]}(U)} E_L^\nabla d^k t = \int_{\phi_Q^{[1]}(U)} ((FL)^* \theta_\nabla - L d^k t)$$

y así, de la Proposición 7.24, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\phi_Q^{[1]}(U)} L d^k t &= \int_{\phi_Q^{[1]}(U)} (FL)^* \theta_\nabla - E_L^\nabla d^k t = \int_{\phi_Q^{[1]}(U)} \tilde{\Theta}_L = \\ &= \int_{\phi_Q^{[1]}(U)} (FL)^* \Theta = \int_{FL \circ \phi_Q^{[1]}(U)} \Theta. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Conocemos de la Sección 6.2.3B que los campos solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (6.34) son los extremales del funcional

$$\mathbb{S}(id_{\mathbb{R}^k}, \phi_Q) = \int_{\phi_Q^{[1]}(U)} L d^k t$$

y, en la Sección 6.1.2B hemos probado que las soluciones de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (6.6) son los extremales del funcional

$$\mathbb{H}(\psi) = \int_{\psi(U)} \Theta.$$

Entonces la igualdad establecida en (7.48) nos garantiza la equivalencia entre los dos principios variacionales del formalismo  $k$ -cosimpléctico lagrangiano y hamiltoniano, esto es,

$$\phi_Q : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$$

*es solución de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange si, y sólo si,*

$$FL \circ \phi_Q^{[1]} : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^* Q$$

*es solución de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl.*



**Observación 7.27** Los resultados de A. Echeverría Enríquez, Miguel Muñoz Le-canda y Narciso Román Roy recogidos en [34] relativo a la Mecánica Autónoma coinciden con los anteriores en el caso particular  $k = 1$ .

◇

En lo que sigue demostraremos que ciertos resultados relativos a la función energía  $E_L^\nabla$ , demostrados para el caso  $k = 1$ , en [34] siguen siendo válidos para un  $k$  arbitrario.

**Lema 7.28** Sean  $\nabla$  una conexión en  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k}: \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $L: \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano, y  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  un SOPDE en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ . Si

$$X_B(\Gamma_A^i) = X_A(\Gamma_B^i), \quad X_A \left( \frac{\partial L}{\partial v_B^i} \right) = \delta_B^A \frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad (7.49)$$

donde  $A, B = 1, \dots, k$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; entonces

$$X_A(E_L^\nabla) = -\tilde{Y}_A^1(L), \quad A = 1, \dots, k.$$

*Demostración:*

La prueba de esta afirmación se realizará mediante un cálculo en coordenadas locales. Para ello haremos uso de las expresiones locales (6.29), (7.18) y (7.19) de un SOPDE,  $\tilde{Y}_A^1$  y  $E_L^\nabla$ .

$$\begin{aligned} & X_A(E_L^\nabla) + \tilde{Y}_A^1(L) \\ &= \left( \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial t^B} - \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial t^A} \right) \frac{\partial L}{\partial v_B^i} = \left( v_B^j \frac{\partial \Gamma_A^i}{\partial q^j} - v_A^j \frac{\partial \Gamma_B^i}{\partial q^j} \right) \frac{\partial L}{\partial v_B^i} \\ &+ \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v_C^k} + v_A^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_C^k} + (X_A)^j_B \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_C^k} - \delta_C^A \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) (v_C^k - \Gamma_C^k) \\ &= \left( \left( \frac{\partial}{\partial t^B} + v_B^j \frac{\partial}{\partial q^j} \right) (\Gamma_A^i) - \left( \frac{\partial}{\partial t^A} + v_A^j \frac{\partial}{\partial q^j} \right) (\Gamma_B^i) \right) \frac{\partial L}{\partial v_B^i} \\ &+ \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v_C^k} + v_A^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_C^k} + (X_A)^j_B \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_C^k} - \delta_C^A \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) (v_C^k - \Gamma_C^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (X_C(\Gamma_A^i) - X_A(\Gamma_C^i)) \frac{\partial L}{\partial v_C^i} \\
 &+ \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial v_C^k} + v_A^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_C^k} + (X_A)^j_B \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_C^k} - \delta_C^A \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) (v_C^k - \Gamma_C^k) \\
 &= (X_C(\Gamma_A^i) - X_A(\Gamma_C^i)) \frac{\partial L}{\partial v_C^i} + \left( X_A \left( \frac{\partial L}{\partial v_C^k} \right) - \delta_C^A \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) (v_C^k - \Gamma_C^k)
 \end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta la hipótesis, se obtiene que

$$X_A(E_L^\nabla) + \tilde{Y}_A^1(L) = 0.$$

□

En el capítulo anterior, Teorema 6.32, se ha probado que si  $L$  es un lagrangiano regular y  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$  es una solución integrable de las ecuaciones geométricas de Euler-Lagrange (6.43), entonces  $\mathbf{X}$  es un SOPDE. Teniendo en cuenta esto y el lema anterior se obtiene el siguiente corolario:

**Corolario 7.29** *Sean  $L$  un lagrangiano regular y  $(X_1, \dots, X_k)$  una solución integrable de las ecuaciones geométricas de Euler-Lagrange, (6.43). Supongamos además que  $L$ ,  $X_A$ , y  $\nabla$  satisfacen las hipótesis (7.49) del lema anterior.*

*Bajo estas condiciones, si el lagrangiano  $L$  es invariante por las prolongaciones  $\tilde{Y}_A^1$ , esto es, si se verifica*

$$\tilde{Y}_A^1(L) = 0,$$

*entonces  $E_L^\nabla$  es constante a lo largo de las secciones integrales de  $(X_1, \dots, X_k)$ .*

*Demostración:*

Por ser  $L$  un lagrangiano regular y  $(X_1, \dots, X_k)$  una solución integrable de las ecuaciones geométricas de Euler-Lagrange (6.43), entonces  $(X_1, \dots, X_k)$  es un SOPDE. Así estamos en condiciones de aplicar el lema anterior de donde se deduce que

$$X_A(E_L^\nabla) + \tilde{Y}_A^1(L) = 0.$$

Además, por hipótesis  $\tilde{Y}_A^1(L) = 0$  y por tanto

$$X_A(E_L^\nabla) = 0.$$

Sea  $\phi^{[1]}(\mathbf{t})$  un sección integral de  $(X_1, \dots, X_k)$  entonces

$$0 = X_A(\phi^{[1]}(\mathbf{t}))(E_L^\nabla) = \phi_*^{[1]}(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \right) (E_L^\nabla) = \frac{\partial}{\partial t^A} (E_L^\nabla \circ \phi^{[1]}) \quad 1 \leq A \leq k.$$

**Observación 7.30** En el caso  $k = 1$ , si  $X$  es el campo de vectores dinámico en  $\mathbb{R} \times TQ$ , entonces  $X$  es un SODE y satisface trivialmente (7.49) del lema anterior porque es solución de las ecuaciones dinámicas

$$\iota_X dt = 1, \quad \iota_X \Omega_L = 0.$$

Por lo tanto en este caso  $X(E_L^\nabla) = -\tilde{Y}^1(L)$ , que es la afirmación del Teorema 1 en [34].

◇

**Proposición 7.31** Sea  $L$  un lagrangiano regular tal que las componentes de la transformación de Legendre  $[FL(\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}})]^A$  son distintas de cero en todo punto  $(\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}}) = (\mathbf{t}, v_{1\mathbf{q}}, \dots, v_{k\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

Consideremos una aplicación  $f : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ , entonces existe una conexión  $\nabla$  tal que la función energía  $E_L^\nabla$  asociada a esta conexión y al lagrangiano  $L$ , está definida por

$$E_L^\nabla = \sum_{A=1}^k f_A,$$

donde  $f_A = \pi^A \circ f : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{\pi^A} \mathbb{R}$ .

Además, si  $L$  es regular y  $(X_1, \dots, X_k)$  es una solución integrable de las ecuaciones geométricas de Euler-Lagrange (6.43) que satisface las condiciones (7.49) y

$$X_A\left(\sum_{B=1}^k f_B\right) = 0 \text{ entonces}$$

$$\tilde{Y}_A^1(L) = 0, \quad A = 1, \dots, k.$$

*Demostración:*

Dada una aplicación  $f = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ , consideramos la conexión  $\nabla$ , del fibrado trivial  $\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ , definida por las relaciones

$$\iota_{\tilde{Y}_A^1} \tilde{\Theta}_L^A = -f_A,$$

donde  $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_k$  denotan los campos de vectores asociados a la conexión  $\nabla$  que han sido introducidos en la definición 7.12.

Entonces

$$E_L^{\nabla} = - \sum_{A=1}^k \iota_{\tilde{Y}_A^1} \tilde{\Theta}_L^A = \sum_{A=1}^k f_A .$$

Así, teniendo en cuenta que  $X_A(\sum_{B=1}^k f_B) = 0$ ,  $1 \leq A \leq k$ , y aplicando el Lema 7.28 se obtiene

$$\tilde{Y}_A^1(L) = -X_A(E_L^{\nabla}) = -X_A(\sum_{B=1}^k f_B) = 0 .$$

□

## Capítulo 8

# Formalismo $k$ -cosimpléctico en algebroides de Lie.

En la primera parte de esta memoria hemos demostrado que la formulación  $k$ -simpléctica se puede extender al contexto que proporcionan los algebroides de Lie.

En el presente capítulo vamos a realizar un estudio similar en el contexto de la formulación  $k$ -cosimpléctica. Además demostraremos que la formulación  $k$ -cosimpléctica estándar desarrollada en el capítulo 6 se corresponde con la teoría que desarrollaremos en este capítulo cuando consideramos como algebroides de Lie el fibrado tangente.

Los conceptos y resultados sobre algebroides de Lie que se necesitan a lo largo de este capítulo se encuentran en las secciones 5.1 y 5.2 del Capítulo 5.

A lo largo de este capítulo denotaremos un algebroides de Lie sobre  $Q$  por  $(E, [\cdot, \cdot]_E, \rho)$ .

### 8.1. Formalismo lagrangiano $k$ -cosimpléctico en algebroides de Lie.

En esta sección vamos a desarrollar el formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico en términos de algebroides de Lie. Además comprobaremos que el formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico estándar, véase la sección 6.2 es un caso particular del formalismo aquí desarrollado.

### 8.1.1. Elementos geométricos.

En esta subsección vamos a describir los elementos geométricos que son necesarios para desarrollar el formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico en algebroides de Lie.

A. La variedad  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$ .

La formulación  $k$ -cosimpléctica de las de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange, descrita en el Capítulo 6, se desarrolla en la variedad  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , donde recordemos que  $T_k^1 Q$  denota el fibrado tangente de las  $k^1$ - velocidades de una variedad  $Q$ , esto es, la suma de Whitney de  $k$  copias del fibrado tangente.

Si pensamos un algebroide de Lie  $E$  como un sustituto del fibrado tangente, es natural pensar que, en esta situación, la variedad

$$\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \equiv \mathbb{R}^k \times (E \oplus \dots \oplus E),$$

va a jugar el papel de  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ . Así los elementos de  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  son de la forma

$$(\mathbf{t}, \mathbf{a}_{\mathbf{q}}) = (\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}).$$

Denotaremos por  $\tilde{\mathbf{p}}: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow Q$  la proyección canónica definida por

$$\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) = \mathbf{q}.$$

A continuación vamos a describir un sistema local de coordenadas en  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$ .

Sea  $(q^i, y^\alpha)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m}$  un sistema de coordenadas locales en un abierto  $\tau^{-1}(U)$  de  $E$ , siendo  $(q^i)_{1 \leq i \leq n}$  las coordenadas en un abierto  $U \subset Q$  de la variedad base  $Q$ . Definimos el sistema de coordenadas locales

$$(t^A, q^i, y_A^\alpha)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq A \leq k}$$

en  $\tilde{\mathbf{p}}^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  como sigue:

$$\begin{aligned} t^A(\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) &= t^A(\mathbf{t}), & q^i(\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) &= q^i(\mathbf{q}), \\ y_A^\alpha(\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) &= y^\alpha(a_{A\mathbf{q}}), \end{aligned} \tag{8.1}$$

donde  $(\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$ .

Estas coordenadas dotan a  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  de una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $n + k(1 + m)$ .

B. La prolongación de un algebroide de Lie mediante  $\tilde{\mathbf{p}}: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow Q$ .

En la sección 5.2 del capítulo 5 hemos recordado la definición de  $\mathcal{T}^E P$ , esto es la prolongación de un algebroide de lie  $E$  mediante una fibración  $\pi: P \rightarrow Q$ .

A continuación consideramos el caso particular

$$P = \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$$

y la fibración

$$\tilde{\mathbf{p}}: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow Q,$$

esto es, (véase la Sección 5.2),

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) & \xrightarrow{\rho^{\tilde{\mathbf{p}}}} & T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \\ \tilde{\tau}_1 \downarrow & & \downarrow T\tilde{\mathbf{p}} \\ E & \xrightarrow{\rho} & TQ \end{array}$$

$$\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) = \{(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}) \in E \times T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) / \rho(a_{\mathbf{q}}) = T\tilde{\mathbf{p}}(v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})})\}. \quad (8.2)$$

Teniendo en cuenta los contenidos de la Sección 5.2, y considerando el caso particular  $P = E \oplus \dots \oplus E$  obtenemos:

- (1)  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  es un algebroide de Lie sobre  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  con proyección

$$\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E}: \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$$

y estructura de algebroide de Lie  $([\cdot, \cdot]^{\tilde{\mathbf{p}}}, \rho^{\tilde{\mathbf{p}}})$  donde el ancla

$$\rho^{\tilde{\mathbf{p}}}: \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) = E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \rightarrow T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$$

es la proyección sobre el segundo factor.

- (2) Si  $(t^A, q^i, y_A^\alpha)$  denota un sistema local de coordenadas de  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  entonces el sistema de coordenadas locales inducido en  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  es

$$(t^A, q^i, y_A^\alpha, z^\alpha, v_A, w_A^\alpha)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \ell \leq n', 1 \leq \alpha \leq m}$$

donde, véase (5.15),

$$\begin{aligned} t^A(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}) &= t^A(\mathbf{t}), & z^\alpha(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}) &= y^\alpha(a_{\mathbf{q}}), \\ q^i(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}) &= q^i(\mathbf{q}), & v_A(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}) &= v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}(t^A), \\ y_A^\alpha(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}) &= y_A^\alpha(\mathbf{b}_{\mathbf{q}}), & w_A^\alpha(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}) &= v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}(y_A^\alpha). \end{aligned} \quad (8.3)$$

- (3) De (5.16) obtenemos que el conjunto  $\{\mathcal{Y}^A, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}$  definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^A: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E &\rightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \\ (\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) &\mapsto \mathcal{Y}^A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = (0_{\mathbf{q}}; \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}), \\ \mathcal{X}_\alpha: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E &\rightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \\ (\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) &\mapsto \mathcal{X}_\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = (e_\alpha(\mathbf{q}); \rho_\alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}), \\ \mathcal{V}_\alpha^A: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E &\rightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \\ (\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) &\mapsto \mathcal{V}_\alpha^A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = (0_{\mathbf{q}}; \frac{\partial}{\partial y_A^\alpha} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}), \end{aligned} \quad (8.4)$$

es una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E}: \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$ .

A partir de ahora denotaremos por  $Sec(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E))$  el conjunto de secciones de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E}$ .

- (4) A cada sección

$$\xi: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$$

de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E}$  le asociamos un campo de vectores por medio del ancla del algebroides  $\rho^{\tilde{p}}: \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \rightarrow T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .



Si  $\xi$  se escribe localmente como sigue:

$$\xi = \xi_A \mathcal{Y}^A + \xi^\alpha \mathcal{X}_\alpha + \xi_A^\alpha \mathcal{V}_\alpha^A \in \text{Sec}(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E))$$

entonces, reescribiendo la expresión (5.17) para este caso particular obtenemos,

$$\rho^{\tilde{p}}(\xi) = \xi_A \frac{\partial}{\partial t^A} + \rho_\alpha^i \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi_A^\alpha \frac{\partial}{\partial y_A^\alpha} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E). \quad (8.5)$$

- (5) El corchete de Lie de secciones de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E}$  queda determinado a partir del corchete de los elementos de una base de secciones,

$$\begin{aligned} \llbracket \mathcal{Y}^A, \mathcal{Y}^B \rrbracket^{\tilde{p}} &= 0, & \llbracket \mathcal{Y}^A, \mathcal{X}_\alpha \rrbracket^{\tilde{p}} &= 0, & \llbracket \mathcal{Y}^A, \mathcal{V}_\beta^B \rrbracket^{\tilde{p}} &= 0, \\ \llbracket \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta \rrbracket^{\tilde{p}} &= \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}_\gamma, & \llbracket \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta^B \rrbracket^{\tilde{p}} &= 0, & \llbracket \mathcal{V}_\alpha^A, \mathcal{V}_\beta^B \rrbracket^{\tilde{p}} &= 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

- (6) Si  $\{\mathcal{Y}_A, \mathcal{X}^\alpha, \mathcal{V}_A^\alpha\}$  es la base dual de  $\{\mathcal{Y}^A, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}$ , de las expresiones (5.20) que caracterizan la diferencial exterior en el algebroide prolongación obtenemos que

$$d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)} f = \frac{\partial f}{\partial t^A} \mathcal{Y}_A + \rho_\alpha^i \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathcal{X}^\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_A^\alpha} \mathcal{V}_A^\alpha, \quad (8.7)$$

para cada  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  y además

$$\begin{aligned} d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)} \mathcal{Y}_A &= 0, \\ d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)} \mathcal{X}^\gamma &= -\frac{1}{2} \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{X}^\beta, \\ d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)} \mathcal{V}_A^\gamma &= 0. \end{aligned} \quad (8.8)$$

A lo largo de esta sección denotaremos la diferencial exterior  $d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)}$  simplemente por  $d$ .

**Observación 8.1** En el caso particular  $E = TQ$  la variedad  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  se identifica con  $T(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$ .

En efecto, consideramos la prolongación de  $TQ$  mediante  $p_Q : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow Q$ . Así de (8.2) se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}^{TQ}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k TQ) &= \mathcal{T}^{TQ}(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) \\
 &= \{(u_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}})}) \in TQ \times T(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) / u_{\mathbf{q}} = T p_Q(v_{w_{\mathbf{q}}})\} \\
 &= \{(T p_Q(v_{(\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}})}), v_{(\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}})}) \in TQ \times T(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) / (\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q\} \\
 &\equiv \{v_{(\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}})} \in T(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) / (\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q\} \equiv T(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) .
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

◇

C. Levantamiento vertical  $A$ -ésimo.

**Definición 8.2** [24] *Un elemento  $(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}})})$  de la prolongación  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  se dice **vertical** si verifica*

$$\tilde{\tau}_1(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}})}) = 0_{\mathbf{q}} \in E ,$$

donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{\tau}_1 : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) &\rightarrow E, \\
 (a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}})}) &\mapsto a_{\mathbf{q}}
 \end{aligned}$$

es la proyección sobre el primer factor  $E$  de  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .

La definición anterior implica que los elementos verticales de  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  son de la forma

$$(0_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}})}) \in \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$$

donde  $v_{(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}})} \in T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  y  $(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$ .

Ahora bien, teniendo en cuenta la definición (8.2), que determina los elementos de  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ , la condición que de un elemento sea vertical significa que

$$0 = T_{(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}})} \tilde{p}(v_{(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}})}) ,$$

es decir el vector  $v_{(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}})}$  es vertical respecto a la proyección  $\tilde{p}: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow Q$ .

Por lo tanto, si consideramos un sistema de coordenadas locales adaptadas  $(t^A, q^i, y_A^\alpha)$  en  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  entonces se verifica que el vector  $v$  es de la forma:

$$v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})} = u_A \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})} + u_B^\alpha \frac{\partial}{\partial y_B^\alpha} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})} \in T_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E).$$

**Definición 8.3** Para cada  $A = 1, \dots, k$  consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \xi^{V_A} : E \times_Q (\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) &\longrightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \\ (a_{\mathbf{q}}, \mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) &\longmapsto \xi^{V_A}(a_{\mathbf{q}}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = \left( 0_{\mathbf{q}}, (a_{\mathbf{q}})_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}^{V_A} \right) \end{aligned} \quad (8.10)$$

donde  $a_{\mathbf{q}} \in E$ ,  $(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = (\mathbf{t}, b_{1\mathbf{q}}, \dots, b_{k\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  y el vector  $(a_{\mathbf{q}})_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}^{V_A} \in T_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  está definido por

$$(a_{\mathbf{q}})_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}^{V_A} f = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f(\mathbf{t}, b_{1\mathbf{q}}, \dots, b_{A\mathbf{q}} + s a_{\mathbf{q}}, \dots, b_{k\mathbf{q}}), \quad 1 \leq A \leq k, \quad (8.11)$$

para una función arbitraria  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .

Denominamos a la aplicación  $\xi^{V_A}$  la aplicación **levantamiento vertical  $A$ -ésimo**.

De (8.11) deducimos que la expresión local de  $(a_{\mathbf{q}})_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}^{V_A}$  es

$$(a_{\mathbf{q}})_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}^{V_A} = y^\alpha(a_{\mathbf{q}}) \frac{\partial}{\partial y_A^\alpha} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})} \in T_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E), \quad 1 \leq A \leq k \quad (8.12)$$

siendo  $(q^i, y^\alpha)$  un sistema local de coordenadas en  $E$  y  $(t^A, q^i, y_A^\alpha)$  el inducido en  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$ .

En (8.12) se observa que el vector

$$(a_{\mathbf{q}})_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}^{V_A} \in T_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$$

es vertical respecto a la aplicación  $\tilde{\mathbf{p}}: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow Q$ . Esto nos garantiza que  $\xi^{V_A}(a_{\mathbf{q}}, \mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})$  es un elemento vertical de  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .

De las expresiones (8.4), (8.10) y (8.12) obtenemos que  $\xi^{V_A}$  se escribe en función de la base local

$$\{\mathcal{Y}^A, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta^B\}$$

de secciones del fibrado vectorial  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E} : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  como sigue:

$$\xi^{V_A}(a_{\mathbf{q}}, \mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = (0_{\mathbf{q}}, y^\alpha(a_{\mathbf{q}}) \frac{\partial}{\partial y_A^\alpha} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}) = y^\alpha(a_{\mathbf{q}}) \mathcal{V}_\alpha^A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}), \quad 1 \leq A \leq k. \quad (8.13)$$

**Observación 8.4** Los levantamientos verticales  $\xi^{V_1}, \dots, \xi^{V_k}$ , que hemos definido en ese apartado, nos permitirán introducir en los apartados D y E de esta subsección dos familias de objetos geométricos canónicos en  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ : *los endomorfismos verticales y las secciones de Liouville*.

D. Endomorfismo verticales en  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .

En la sección 6.2.1 hemos definido una familia  $S^1, \dots, S^k$  de tensores de tipo  $(1, 1)$  en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ . Esta familia de tensores de tipo  $(1, 1)$  se emplea en el desarrollo de la formulación lagrangiana  $k$ -simpléctica de las teorías clásicas de campos de primer orden.

En este apartado vamos a introducir el objeto análogo en el contexto de los algebroides de Lie.

**Definición 8.5** Para cada  $A = 1, \dots, k$  se define el **endomorfismo vertical  $A$ -ésimo** en  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  como la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{S}^A : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) &\rightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \\ (a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}) &\mapsto \tilde{S}^A(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}) = \xi^{V_A}(a_{\mathbf{q}}, \mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}), \end{aligned} \quad (8.14)$$

donde  $a_{\mathbf{q}} \in E$ ,  $(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  y  $v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})} \in T_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .

**Lema 8.6** Consideremos

$$\{\mathcal{Y}^A, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}_{1 \leq A \leq k, 1 \leq \alpha \leq m}$$

una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E} : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  y sea

$$\{\mathcal{Y}_A, \mathcal{X}^\alpha, \mathcal{V}_A^\alpha\}_{1 \leq A \leq k, 1 \leq \alpha \leq m}$$

la base dual asociada.

En estas bases, la expresión local de  $\tilde{S}^A$  es:

$$\tilde{S}^A = \sum_{\alpha=1}^m \mathcal{V}_\alpha^A \otimes \mathcal{X}^\alpha, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (8.15)$$

*Demostración:*

La expresión local de  $\tilde{S}^A$  es consecuencia de las expresiones (8.4) y (8.13). En efecto, teniendo en cuenta estas expresiones obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{S}^A(\mathcal{Y}^B(\mathbf{t}, \mathbf{b}_\mathbf{q})) &= \xi^{V_A}(0_\mathbf{q}, \mathbf{t}, \mathbf{b}_\mathbf{q}) = y_A^\alpha(0_\mathbf{q}) \mathcal{V}_\alpha^A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_\mathbf{q}) = 0, \\ \tilde{S}^A(\mathcal{X}_\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{b}_\mathbf{q})) &= \xi^{V_A}(e_\alpha(\mathbf{q}), \mathbf{t}, \mathbf{b}_\mathbf{q}) = y^\beta(e_\alpha(\mathbf{q})) \mathcal{V}_\beta^A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_\mathbf{q}) = \mathcal{V}_\alpha^A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_\mathbf{q}) \\ \tilde{S}^A(\mathcal{V}_\alpha^B(\mathbf{t}, \mathbf{b}_\mathbf{q})) &= \xi^{V_A}(0_\mathbf{q}, \mathbf{t}, \mathbf{b}_\mathbf{q}) = y_A^\alpha(0_\mathbf{q}) \mathcal{V}_\alpha^A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_\mathbf{q}) = 0, \end{aligned}$$

para cada  $(\mathbf{t}, \mathbf{b}_\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  y cada  $A, B = 1, \dots, k, \alpha = 1, \dots, m$ .

□

**Observación 8.7** Los endomorfismos  $\tilde{S}^1, \dots, \tilde{S}^k$  que hemos definido en este apartado nos permitirán introducir las “secciones lagrangianas” en el formalismo Lagrangiano  $k$ -cosimpléctico en algebroides de Lie. Además también nos permitirán caracterizar ciertas secciones del fibrado prolongación  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  denominadas SOPDE’s (que definiremos en la subsección siguiente).

◇

**Observación 8.8** Reescribiendo la definición de  $\tilde{S}^1, \dots, \tilde{S}^k$  en el caso particular  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  obtenemos los campos de tensores canónicos  $S^1, \dots, S^k$  en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , véase el capítulo 6.

## E. Las secciones de Liouville.

En este apartado vamos a introducir la segunda familia de elementos geométricos canónicos que consideraremos en la prolongación  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .

**Definición 8.9** *La sección de Liouville  $A$ -ésima en  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  es la sección  $\widehat{\Delta}_A$  de  $\widetilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E} : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  definida como sigue*

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_A : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E &\rightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \\ (\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) &\mapsto \widehat{\Delta}_A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = \xi^{V_A}(pr_A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}), \mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = \xi^{V_A}(b_{A\mathbf{q}}, \mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) \end{aligned} ,$$

donde  $(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) = (\mathbf{t}, b_{1\mathbf{q}}, \dots, b_{k\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  y  $pr_A : \bigoplus^k E \rightarrow E$  es la proyección sobre la  $A$ -ésima copia de  $E$  en  $\bigoplus^k E$ .

De la expresión local (8.13) de  $\xi^{V_A}$  y teniendo en cuenta que

$$y^\alpha(b_{A\mathbf{q}}) = y_A^\alpha(\mathbf{t}, b_{1\mathbf{q}}, \dots, b_{k\mathbf{q}}) = y_A^\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}})$$

se obtiene que la sección  $\widehat{\Delta}_A$  tiene la siguiente expresión local

$$\widehat{\Delta}_A = \sum_{\alpha=1}^m y_A^\alpha \mathcal{V}_\alpha^A, \quad 1 \leq A \leq k, \quad (8.16)$$

en la base local de secciones de  $\widetilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E}$  dada por  $\{\mathcal{Y}^A, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}$  y que definimos en (8.4).

**Observación 8.10** En el caso estándar, esto es, cuando  $E = TQ$  se verifica que cada sección  $\widehat{\Delta}_A$  se identifica con el  $A$ -ésimo campo de vectores de Liouville o campo de vectores canónico  $\Delta_A$  en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , (véase el capítulo 6).

◇

En el formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico estándar los campos de vectores canónicos  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ , son utilizados para definir la función energía lagrangiana.

De modo análogo, en el contexto que nos proporcionan los algebroides de Lie sucede algo similar ya que, como veremos en la sección 8.1.3, definiremos la función energía lagrangiana a partir de las secciones de Liouville  $\widehat{\Delta}_1, \dots, \widehat{\Delta}_k$ .

### 8.1.2. Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

En el formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico estándar las soluciones de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange se obtienen como secciones integrales de ciertos campos de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  que denominamos SOPDES.

Con el fin de introducir el concepto de SOPDE en este capítulo vamos a recordar el concepto de SOPDE en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , (para más detalles véase la sección 6.2.2).

Un SOPDE,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ , en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  es un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ , esto es, una sección de

$$\tau_{\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q}^k : T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$$

tal que

$$dt^A(X_B) = \delta_B^A \quad \text{y} \quad S^A(X_A) = \Delta_A, \quad 1 \leq A, B \leq k$$

donde  $\Delta_A$  y  $S^A$  denotan los campos de vectores canónicos y los campos de tensores canónicos en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  que han sido definidos en la sección 6.2.1.

Basándonos en esta definición introduciremos la definición de SOPDE en algebroides de Lie.

Denotaremos por  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  la suma de Whitney sobre  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  de  $k$  copias de  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ , esto es,

$$(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) = \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E).$$

Teniendo en cuenta que  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  es el análogo en algebroides de Lie de  $T(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$  es trivial comprobar que  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  va a jugar el papel del fibrado  $T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$ , esto es, el fibrado de las  $k^1$ -velocidades de  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

Es evidente que una sección

$$\xi : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$$

de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  induce una familia  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  de secciones de  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  sin más que proyectar sobre cada factor de la suma directa que define  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .

**Definición 8.11** *Una sección*

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$$

de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  se dice una **ecuación en derivadas parciales de segundo orden** (SOPDE) si verifica

$$\tilde{S}^A(\xi_A) = \hat{\Delta}_A \quad y \quad \mathcal{Y}_B(\xi_A) = \delta_B^A, \quad 1 \leq A, B \leq k.$$

**Lema 8.12** *Sea*

$$\{\mathcal{Y}^A, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}_{1 \leq A \leq k, 1 \leq \alpha \leq m}$$

una base local de  $\text{Sec}(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E))$ . Entonces un SOPDE  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  se escribe localmente como sigue:

$$\xi_A = \mathcal{Y}^A + y_A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + (\xi_A)_B^\alpha \mathcal{V}_\alpha^B, \quad A = 1, \dots, k, \quad (8.17)$$

donde  $(\xi_A)_\alpha^B$  son funciones definidas en  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$ .

*Demostración:*

Una sección  $\xi_A$  se escribe, en la base  $\{\mathcal{Y}^A, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}$  como sigue:

$$\xi_A = (\xi_A)_B \mathcal{Y}^B + \xi_A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + (\xi_A)_B^\alpha \mathcal{V}_\alpha^B,$$

para ciertas funciones  $(\xi_A)_B, \xi_A^\alpha, (\xi_A)_\alpha^B \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .

Por ser  $\xi$  un SOPDE verifica

$$\tilde{S}^A(\xi_A) = \hat{\Delta}_A \quad y \quad \mathcal{Y}_B(\xi_A) = \delta_B^A, \quad 1 \leq A, B \leq k.$$

Entonces, a partir de estas relaciones y de las expresiones locales (8.15) y (8.16) de  $\tilde{S}^A$  y  $\hat{\Delta}_A$  obtenemos:

$$\delta_B^A = \mathcal{Y}_B(\xi_A) = (\xi_A)_B \quad y \quad y_A^\alpha \mathcal{V}_\alpha^A = \tilde{\Delta}_A = \tilde{S}^A(\xi_A) = \xi_A^\alpha \mathcal{V}_\alpha^A,$$

de donde se sigue que

$$(\xi_A)_B = \delta_B^A \quad y \quad \xi_A^\alpha = y_A^\alpha.$$

□



En el siguiente lema demostraremos que cada SOPDE  $\xi$  nos permite definir un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$ .

**Lema 8.13** *Sea  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k): \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  una sección de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ . Entonces*

$$(\rho^{\tilde{p}}(\xi_1), \dots, \rho^{\tilde{p}}(\xi_k)): \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow T_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$$

*es un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$ .*

*Recordemos que*

$$\rho^{\tilde{p}}: \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \rightarrow T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$$

*es el ancla del algebroid  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .*

*Demostración:*

Es una consecuencia directa del Lema 5.7 y del hecho de que cada  $\xi_A$  es una sección de  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .

□

En un sistema local de coordenadas se verifica que si

$$\xi_A = \mathcal{Y}^A + y_A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + (\xi_A)_B^\alpha \mathcal{V}_\alpha^B \in \text{Sec}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$$

entonces

$$\rho^{\tilde{p}}(\xi_A) = \frac{\partial}{\partial t^A} + \rho_\alpha^i y_A^\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + (\xi_A)_B^\alpha \frac{\partial}{\partial y_B^\alpha} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E). \quad (8.18)$$

Para finalizar esta subsección vamos a introducir el concepto de sección integral de un SOPDE en el contexto de algebroides de Lie.

**Definición 8.14** *Una aplicación*

$$\eta: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$$

es una sección integral de un SOPDE  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  si  $\eta$  es una sección integral del campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$

$$(\rho^{\tilde{p}}(\xi_1), \dots, \rho^{\tilde{p}}(\xi_k))$$

asociado a  $\xi$  (véase el lema anterior). Es decir,  $\eta$  es una sección integral de  $\xi$  si y sólo si,

$$\rho^{\tilde{p}}(\xi_A)(\eta(\mathbf{t})) = \eta_*(\mathbf{t}) \left( \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right), \quad 1 \leq A \leq k. \quad (8.19)$$

Si  $\eta : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  se expresa localmente como sigue

$$\eta(\mathbf{t}) = (\eta_A(\mathbf{t}), \eta^i(\mathbf{t}), \eta_A^\alpha(\mathbf{t})),$$

entonces, de la expresión local (8.18), deducimos que (8.19) es equivalente a la familia de identidades

$$\frac{\partial \eta_B}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} = \delta_B^A, \quad \frac{\partial \eta^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} = \eta_A^\alpha(\mathbf{t}) \rho_\alpha^i, \quad \frac{\partial \eta_B^\beta}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} = (\xi_A)_B^\beta(\eta(\mathbf{t})). \quad (8.20)$$

### 8.1.3. Formalismo lagrangiano.

En esta subsección vamos a describir la formulación lagrangiana  $k$ -cosimpléctica en algebroides de Lie.

Con la finalidad de simplificar la notación, a lo largo de esta sección denotaremos por  $d$  la diferencial exterior en el algebroides de Lie  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ , esto es,

$$d := d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)}.$$

Una función  $L : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}$  se llamará **función lagrangiana**. En primer lugar vamos a introducir algunos objetos geométricos asociados a un lagrangiano  $L$ .

#### A. Secciones de Poincaré-Cartan o secciones lagrangianas.

De modo análogo a lo que ocurre en el formalismo  $k$ -cosimpléctico estándar, a partir de los endormorfismos verticales  $\tilde{S}^1, \dots, \tilde{S}^k$  y dada  $L$  una función lagrangiana se definen las siguientes 1-secciones de  $(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E))^*$

$$\begin{aligned} \Theta_L^A : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E &\longrightarrow (\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E))^* & 1 \leq A \leq k \\ (\mathbf{t}, \mathbf{b}_q) &\longmapsto \Theta_L^A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q) \end{aligned}$$

en donde  $\Theta_L^A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)$  es la aplicación

$$\Theta_L^A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q) : (\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E))_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)} \equiv E_q \times_{TQ} T_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por la composición

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{10em} \Theta_L^A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q) \hspace{10em}} \\ [\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)]_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)} \xrightarrow{\tilde{S}_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}^A} [\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)]_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)} \xrightarrow{(dL)_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}} \mathbb{R} \end{array}$$

esto es,

$$(\Theta_L^A)(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)(a_q, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}) = (dL)_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}((\tilde{S}^A)_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}(a_q, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)})) , \quad (8.21)$$

siendo  $d = d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)}$  la diferencial exterior de  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ , véase (8.39).

Estas secciones  $\Theta_L^1, \dots, \Theta_L^k$  se denominan **secciones lagrangianas** o secciones de Poincaré-Cartan.

Utilizando la expresión (8.39) de  $df = d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)} f$  con  $f = L$  se obtiene:

$$\begin{aligned} (\Theta_L^A)(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)(a_q, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}) &= (dL)_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}((\tilde{S}^A)_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}(a_q, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)})) \\ &= [\rho^{\tilde{P}}((\tilde{S}^A)_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}(a_q, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}))]L , \end{aligned} \quad (8.22)$$

donde  $(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q) \in \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$ ,  $(a_q, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}) \in [\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)]_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}$  y

$$\rho^{\tilde{P}}((\tilde{S}^A)_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}(a_q, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)})) \in T_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_q)}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E).$$

A partir de las 1-secciones  $\Theta_L^1, \dots, \Theta_L^k$  definimos las 2-secciones

$$\Omega_L^A : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E))^* \wedge (\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E))^* , \quad 1 \leq A \leq k$$

por

$$\Omega_L^A := -d\Theta_L^A , \quad 1 \leq A \leq k .$$

Reescribiendo el apartado (2) de la Definición 5.2 de la diferencial exterior de un algebroide de Lie para el algebroide  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned}\Omega_L^A(\xi_1, \xi_2) &= -d\Theta_L^A(\xi_1, \xi_2) \\ &= [\rho^{\tilde{p}}(\xi_2)](\Theta_L^A(\xi_1)) - [\rho^{\tilde{p}}(\xi_1)](\Theta_L^A(\xi_2)) + \Theta_L^A(\llbracket \xi_1, \xi_2 \rrbracket^{\tilde{p}}),\end{aligned}\quad (8.23)$$

para todo par  $\xi_1, \xi_2 \in \text{Sec}(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E))$  donde  $(\rho^{\tilde{p}}, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket^{\tilde{p}})$  denota la estructura de algebroide de Lie de  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  definida en el punto (1) de la Sección 8.2.1.B.

A continuación establecemos las expresiones locales de  $\Theta_L^A$  y  $\Omega_L^A$ .

Consideremos

$$\{\mathcal{Y}^B, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^B\}_{1 \leq B \leq k, 1 \leq \alpha \leq m}$$

una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E} : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  y

$$\{\mathcal{Y}_B, \mathcal{X}^\alpha, \mathcal{V}_B^\alpha\}_{1 \leq B \leq k, 1 \leq \alpha \leq m}$$

su base dual.

Entonces de (8.5), (8.15) y (8.22) obtenemos

$$\Theta_L^A = \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha} \mathcal{X}^\alpha, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (8.24)$$

De las expresiones locales (8.5), (8.6), (8.39), (8.23) y (8.24) obtenemos para cada  $A = 1, \dots, k$ ,

$$\begin{aligned}\Omega_L^A &= \frac{1}{2} \left( \rho_\beta^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\alpha} - \rho_\alpha^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\beta} + \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma} \right) \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{X}^\beta \\ &+ \frac{\partial^2 L}{\partial t^B \partial y_A^\alpha} \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{Y}_B + \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{V}_B^\beta.\end{aligned}\quad (8.25)$$

**Observación 8.15** Si consideramos el caso particular  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$ , entonces

$$\Omega_L^A(X, Y) = \omega_L^A(X, Y), \quad 1 \leq A \leq k,$$

donde  $X, Y$  son campos de vectores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  y  $\omega_L^1, \dots, \omega_L^k$  denotan las 2-formas lagrangianas del formalismo  $k$ -cosimpléctico estándar definidas como sigue:  $\omega_L^A = -d(dL \circ J^A)$ .

## B. La función energía lagrangiana.

La siguiente definición es la versión en algebroides de Lie de la función energía lagrangiana.

**Definición 8.16** Sea  $L : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}$  una función lagrangiana. La función energía

$$E_L : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}$$

asociada al lagrangiano  $L$  se define como sigue

$$E_L = \sum_{A=1}^k \rho^{\tilde{p}}(\hat{\Delta}_A) L - L .$$

donde  $\rho^{\tilde{p}}(\hat{\Delta}_A) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  son los campos de vectores asociados a las secciones  $\hat{\Delta}_A$  y definidos por (8.5).

De (8.5) y (8.16) se deduce que  $E_L$  tiene la siguiente expresión local:

$$E_L = \sum_{A=1}^k y_A^\alpha \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha} - L \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) . \quad (8.26)$$

**Observación 8.17** Si consideramos el caso particular  $E = TQ$  la función  $E_L$  coincide con la función energía del formalismo  $k$ -cosimpléctico estándar, véase el capítulo 6 de esta memoria.

◇

## C. Morfismos

En la formulación lagrangiana  $k$ -cosimpléctica, una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange es un campo

$$\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow Q$$

tal que su primera prolongación

$$\phi^{[1]} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$$

(véase la Definición 6.23) verifica las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange, esto es,

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{[1]}(\mathbf{t})} .$$

La aplicación  $\phi$  induce el siguiente morfismo de algebroides de Lie

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}^k & \xrightarrow{T\phi} & TQ \\ \tau_{\mathbb{R}^k} \downarrow & & \downarrow \tau_Q \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\phi} & Q \end{array}$$

y además se verifica

$$d(\Phi^* \mu) = \Phi^*(d\mu)$$

para toda  $l$ -forma  $\mu$  en  $Q$ , entonces

$$\Phi = (T\phi, \phi)$$

es un morfismo de algebroides de Lie, (véase la sección 5.1.4 para recordar la definición de morfismo de algebroides de Lie).

Recordemos la definición de  $\phi^{[1]}$  con la finalidad de introducir posteriormente el objeto análogo en el contexto de los algebroides de Lie.

Consideremos la base canónica de secciones de  $\tau_{\mathbb{R}^k}$ ,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^k} \right\},$$

la primera prolongación  $\phi^{[1]}$  de  $\phi$ , se escribe como sigue:

$$\phi^{[1]}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, T_{\mathbf{t}}\phi(\frac{\partial}{\partial t^1} \Big|_{\mathbf{t}}), \dots, T_{\mathbf{t}}\phi(\frac{\partial}{\partial t^k} \Big|_{\mathbf{t}})).$$

Lo que acabamos de hacer es describir las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange desde un nuevo punto de vista que nos permite pensar una solución como un morfismo de algebroides de Lie.

Volviendo al caso de algebroides, sustituyendo el fibrado tangente  $TQ$  por un algebroides de Lie  $E$  y siguiendo una descripción análoga a la que acabamos de hacer obtenemos que el análogo del campo solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange será un morfismo de algebroides de Lie  $\Phi = (\bar{\Phi}, \underline{\Phi})$

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}^k & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & E \\ \tau_{\mathbb{R}^k} \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\underline{\Phi}} & Q \end{array}$$

Considerando

$$\{e_A\}_{A=1}^k$$

una base local de secciones de  $T\mathbb{R}^k$ , podemos definir una aplicación

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$$

asociada a  $\Phi$  y dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \equiv \mathbb{R}^k \times E \oplus \dots \oplus E \\ t &\rightarrow (t, \bar{\Phi}(e_1(t)), \dots, \bar{\Phi}(e_k(t))) . \end{aligned}$$

**Observación 8.18** En el caso particular  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  se verifica:  $\Phi = (T\phi, \phi)$ ,  $e_A = \partial/\partial t^A$  la aplicación  $\tilde{\Phi}$  se corresponde con la primera prolongación de la  $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow Q$ , esto es,

$$\tilde{\Phi} = \phi^{[1]} .$$

Denotaremos por  $\Phi : T\mathbb{R}^k \rightarrow E$  un morfismo de algebroides de Lie  $\Phi = (\bar{\Phi}, \underline{\Phi})$  entre  $\tau_{\mathbb{R}^k} : T\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  y  $\tau : E \rightarrow Q$ .

Ahora vamos a escribir las expresiones locales del morfismo de algebroides de lie y la aplicación asociada.

Sean

$$(t^A)_{1 \leq A \leq k} \quad \text{y} \quad (q^i)_{1 \leq i \leq n}$$

dos sistemas locales de coordenadas en  $\mathbb{R}^k$  y  $Q$ , respectivamente. Sea

$$\{e_A\}_{1 \leq A \leq k}$$

una base local de secciones de  $\tau_{\mathbb{R}^k} : T\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  y

$$\{e_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq m}$$

una base local de secciones de  $\tau : E \rightarrow Q$ . Además denotamos por

$$\{e^A\}_{1 \leq A \leq k} \quad \text{y} \quad \{e^\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq m}$$

las bases duales correspondientes. Entonces el morfismo  $\Phi : T\mathbb{R}^k \rightarrow E$  está determinado por las relaciones

$$\underline{\Phi}(\mathbf{t}) = (\phi^i(\mathbf{t})) \quad \text{y} \quad \Phi^* e^\alpha = \phi_A^\alpha e^A$$

para ciertas funciones locales  $\phi^i$  y  $\phi_A^\alpha$  en  $\mathbb{R}^k$ .

Así, la aplicación asociada  $\tilde{\Phi}$  está localmente dada por

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \phi^i(\mathbf{t}), \phi_A^\alpha(\mathbf{t})).$$

En este caso, las condiciones de morfismo de Lie (5.7) y (5.8) se escriben como sigue

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} = \rho_\alpha^i \phi_A^\alpha \quad \text{y} \quad 0 = \frac{\partial \phi_A^\alpha}{\partial t^B} - \frac{\partial \phi_B^\alpha}{\partial t^A} + \mathcal{C}_{\beta\gamma}^\alpha \phi_B^\beta \phi_A^\gamma \quad (8.27)$$

donde  $\rho_\alpha^i$  y  $\mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma$  son las funciones de estructura del algebroides de Lie  $E$ .

**Observación 8.19** En el caso estándar, esto es, cuando  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  las condiciones de morfismo anteriores se reducen a

$$\phi_A^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi_A^i}{\partial t^B} = \frac{\partial \phi_B^i}{\partial t^A},$$

de modo que la segunda de estas identidades se puede escribir como sigue:

$$\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial t^B \partial t^A} = \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial t^A \partial t^B}.$$

Así, en el formalismo  $k$ -cosimpléctico estándar, considerar morfismos de algebroides de Lie y las aplicaciones asociadas es equivalente a considerar soluciones  $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  y la primera prolongación  $\phi^{[1]}$  de las mismas.

◇



## D. Las ecuaciones de Euler-Lagrange.

El siguiente teorema, principal resultado de esta sección, es el análogo, en el contexto de algebroides de Lie, del Teorema 6.32 que resume el formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico estándar.

**Teorema 8.20** *Sea  $L : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano regular y*

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$$

*una sección de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  tal que*

$$\mathcal{Y}_B(\xi_A) = \delta_A^B \quad , \quad \sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \Omega_L^A = dE_L + \sum_{A=1}^k \frac{\partial L}{\partial t^A} \mathcal{Y}_A . \quad (8.28)$$

*Entonces:*

(1)  $\xi$  es un SOPDE.

(2) Sea  $\Phi = (\bar{\Phi}, \underline{\Phi})$  un morfismo de algebroides de Lie entre  $\tau_{\mathbb{R}^k} : T\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  y  $\tau : E \rightarrow Q$  y sea  $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  la aplicación asociada.

Si  $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$ ,  $\tilde{\Phi}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \phi^i(\mathbf{t}), \phi_A^\alpha(\mathbf{t}))$  es una sección integral del SOPDE  $\xi$ , entonces es una solución del siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \right) &= \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} - \phi_A^\beta \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} , \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} &= \phi_A^\alpha(\mathbf{t}) \rho_\alpha^i \\ 0 &= \frac{\partial \phi_A^\alpha}{\partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial \phi_B^\alpha}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \mathcal{C}_{\beta\gamma}^\alpha \phi_B^\beta(\mathbf{t}) \phi_A^\gamma(\mathbf{t}) \end{aligned} \quad (8.29)$$

*Estas ecuaciones las denominamos ecuaciones de campo de Euler-Lagrange en algebroides de Lie.*

*Demostración:*

Consideremos

$$\{\mathcal{Y}^B, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha^B\}_{1 \leq B \leq k, 1 \leq \alpha \leq m}$$

una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E} : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  y

$$\{\mathcal{Y}_B, \mathcal{X}^\alpha, \mathcal{V}_B^\alpha\}_{1 \leq B \leq k, 1 \leq \alpha \leq m}$$

su base dual.

Entonces cada  $\xi_A \in \text{Sec}(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E))$  se escribe localmente como sigue:

$$\xi_A = (\xi_A)_B \mathcal{Y}^B + \xi_A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + (\xi_A)_B^\alpha \mathcal{V}_\alpha^B$$

para ciertas funciones  $(\xi_A)_B, \xi_A^\alpha, (\xi_A)_B^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .

Teniendo en cuenta esta expresión local, la ecuación

$$\mathcal{Y}_B(\xi_A) = \delta_A^B, \quad 1 \leq A, B \leq k$$

implica que

$$(\xi_A)_B = \delta_A^B, \quad 1 \leq A, B \leq k.$$

Por otra parte, mediante un sencillo cálculo en coordenadas locales y considerando la expresión local de  $\Omega_L^A$  dada en (8.25) obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \Omega_L^A &= \xi_A^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial t^B \partial y_A^\alpha} \mathcal{Y}_B + \xi_A^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} \mathcal{V}_B^\beta \\ &- \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial y_A^\alpha} + \xi_A^\beta \left( \rho_\beta^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\alpha} - \rho_\alpha^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\beta} + \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma} \right) + (\xi_A)_B^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} \right) \mathcal{X}^\alpha, \end{aligned}$$

y de las expresiones locales (8.7) y (8.26) de  $d = d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)}$  y  $E_L$  obtenemos:

$$dE_L + \frac{\partial L}{\partial t^A} \mathcal{Y}_A = y_A^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial t^B \partial y_A^\alpha} \mathcal{Y}_B + y_A^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial y_A^\alpha \partial y_B^\beta} \mathcal{V}_B^\beta + \rho_\alpha^i \left( y_A^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\beta} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \mathcal{X}^\alpha.$$

De donde se sigue que  $\xi : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  es solución del sistema de ecuaciones (8.28) si, y sólo si,

$$\begin{aligned}
 (\xi_A)_B &= \delta_B^A, \\
 \xi_A^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial t^B \partial y_A^\alpha} &= y_A^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial t^B \partial y_A^\alpha}, \\
 \xi_A^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} &= y_A^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial y_A^\alpha \partial y_B^\beta}, \\
 \frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial y_A^\alpha} + \xi_A^\beta \left( \rho_\beta^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\alpha} - \rho_\alpha^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_B^\beta} + \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma} \right) + (\xi_A)_B^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} \\
 &= \rho_\alpha^i \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - y_A^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\beta} \right).
 \end{aligned} \tag{8.30}$$

Cuando  $L$  es regular, esto es, cuando la matriz  $\left( \frac{\partial^2 L}{\partial y_A^\alpha \partial y_B^\beta} \right)$  es regular, de la tercera identidad de (8.30) obtenemos

$$\xi_A^\alpha = y_A^\alpha, \quad 1 \leq A \leq k, 1 \leq \alpha \leq m,$$

y por tanto, cuando el lagrangiano es regular, se verifica que si

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$$

es solución de (8.28) entonces:

(1)  $\xi$  es un SOPDE en  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  y se escribe localmente como sigue:

$$\xi_A = \mathcal{Y}_A + y_A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + (\xi_A)_B^\alpha \mathcal{V}_\alpha^B$$

para ciertas funciones  $(\xi_A)_B^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  y

(2) las funciones  $(\xi_A)_B^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^A \partial y_A^\alpha} + y_A^\beta \rho_\beta^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial y_A^\alpha} + (\xi_A)_B^\beta \frac{\partial^2 L}{\partial y_B^\beta \partial y_A^\alpha} = \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} - y_A^\beta \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma}. \tag{8.31}$$

Sea ahora  $\Phi = (\overline{\Phi}, \underline{\Phi})$  un morfismo de algebroides de Lie entre  $\tau_{\mathbb{R}^k} : T\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  y  $\tau : E \rightarrow Q$  y

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$$

la aplicación asociada.

Si  $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  es una sección integral del SOPDE  $\xi$  y

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \phi^i(\mathbf{t}), \phi_A^\alpha(\mathbf{t}))$$

es la expresión local de  $\tilde{\Phi}$  entonces de (8.20), (8.27), (8.30) y (8.31) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \right) &= \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} - \phi_A^\beta(\mathbf{t}) \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})}, \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} &= \phi_A^\alpha(\mathbf{t}) \rho_\alpha^i, \\ 0 &= \frac{\partial \phi_A^\alpha}{\partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial \phi_B^\alpha}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \mathcal{C}_{\beta\gamma}^\alpha \phi_B^\beta(\mathbf{t}) \phi_A^\gamma(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

donde la última ecuación es consecuencia de que  $\Phi$  es un morfismo de algebroides de Lie. Denominamos a estas ecuaciones **ecuaciones de Euler-Lagrange** escritas en términos de algebroides de Lie.

□

E. Caso particular: formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico estándar.

Como punto y final de esta sección consideramos interesante señalar que el formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico estándar (véase la Sección 6.2.3) es un caso particular del formalismo lagrangiano en algebroides de Lie, cuando  $E = TQ$ , la aplicación ancla  $\rho$  es la identidad en  $TQ$ , (en este caso las constantes de estructura son  $\mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma = 0$ ).

En este caso se tiene:

- $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  se identifica con  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ ,  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  con  $T(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$  y  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  con  $T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$ .

- La función energía  $E_L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  es ahora  $E_L = \sum_{A=1}^k \Delta_A(L) - L$ , donde  $\Delta_A \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$ .

- Una sección

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$$

se corresponde con un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q).$$

- Sea  $f$  una función en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  entonces

$$d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)} f(Y) = df(Y)$$

donde  $df$  denota la diferencial usual e  $Y$  es un campo de vectores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

- Se verifica que

$$\Omega_L^A(X, Y) = \omega_L^A(X, Y), \quad (A = 1, \dots, k),$$

donde  $\omega_L^A$  son las 2-formas lagrangianas del formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico estándar definidas en la sección 6.2.1.D.

- Así, en el formalismo  $k$ -cosimpléctico estándar la ecuación (8.28) se escribe como sigue:

$$dt^A(\xi_B) = \delta_B^A \quad , \quad \sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \omega_L^A = dE_L + \sum_{A=1}^k \frac{\partial L}{\partial t^A} dt^A.$$

- En el caso estándar una aplicación  $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  induce un morfismo de algebroides de Lie  $(T\phi, \phi)$  entre  $T\mathbb{R}^k$  y  $TQ$ . En este caso, la aplicación  $\tilde{\Phi}$ , asociada a este morfismo, coincide con la primera prolongación  $\phi^{[1]}$  de  $\phi$  dada por

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, T\phi(\frac{\partial}{\partial t^1} \Big|_{\mathbf{t}}), \dots, T\phi(\frac{\partial}{\partial t^k} \Big|_{\mathbf{t}})) = \phi^{[1]}(\mathbf{t}).$$

Así, del Teorema 8.20 y los comentarios anteriores, deducimos el siguiente corolario, el cual es un resumen del formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico estándar.

**Corolario 8.21** Sea  $L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano regular y  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$  tal que

$$dt^A(\xi_B) = \delta_B^A \quad , \quad \sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \omega_L^A = dE_L + \sum_{A=1}^k \frac{\partial L}{\partial t^A} dt^A .$$

Entonces:

- (1)  $\xi$  es a SOPDE
- (2) Si  $\tilde{\Phi}$  es una sección integral del campo de  $k$ -vectores  $\xi$ , entonces es una solución de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (6.34). Observemos que  $\tilde{\Phi} = \phi^{[1]}$ .

□

La relación entre los elementos geométricos del formalismo  $k$ -cosimpléctico lagrangiano estándar y en algebroides de Lie, que describimos anteriormente, se recoge de un modo esquemático a continuación:

■ Funciones lagrangianas.

- Algebroides de Lie:

$$L : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}.$$

- Estándar:

$$L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}.$$

■ Secciones de Poincaré-Cartan.

- Algebroides de Lie:

$$\Omega_L^A : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E))^* \wedge (\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E))^* .$$

- Estándar:

$$\omega_L^A : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow T^*(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q) \wedge T^*(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q).$$

■ Ecuaciones algebraicas.

- Algebroides de Lie:

$$\mathcal{Y}_B(\xi_A) = \delta_A^B \quad , \quad \sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \Omega_L^A = d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)} E_L + \sum_{A=1}^k \frac{\partial L}{\partial t^A} \mathcal{Y}_A \quad ,$$

donde  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .

- Estándar:

$$dt^A(\xi_B) = \delta_B^A \quad , \quad \sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \omega_L^A = dE_L + \sum_{A=1}^k \frac{\partial L}{\partial t^A} dt^A \quad .$$

$(\xi_1, \dots, \xi_k) : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow T_k^1(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$  es un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .

■ Ecuaciones de campo.

- Algebroides de Lie:

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \left( \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \right) &= \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} - \phi_A^\beta \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial L}{\partial y_A^\gamma} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \quad , \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} &= \phi_A^\alpha(\mathbf{t}) \rho_\alpha^i \\ 0 &= \frac{\partial \phi_A^\alpha}{\partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial \phi_B^\alpha}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \mathcal{C}_{\beta\gamma}^\alpha \phi_B^\beta(\mathbf{t}) \phi_A^\gamma(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

Las soluciones de estas ecuaciones son aplicaciones

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}: \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \\ t &\mapsto \tilde{\Phi}(\mathbf{t}) = (\phi_A(\mathbf{t}), \phi^i(\mathbf{t}), \phi_A^\alpha(\mathbf{t})) \end{aligned}$$

- Estándar:

$$\sum_{A=1}^k \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_t \left( \frac{\partial L}{\partial v_A^i} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\tilde{\Phi}(\mathbf{t})} \quad , \quad v_A^i(\tilde{\Phi}(\mathbf{t})) = \frac{\partial (q^i \circ \tilde{\Phi})}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \quad .$$

Las soluciones de estas ecuaciones son aplicaciones

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}: \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \\ t &\mapsto \tilde{\Phi}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \phi^i(\mathbf{t}), \phi_A^i(\mathbf{t})) \end{aligned}$$

## 8.2. Formalismo hamiltoniano

En esta sección vamos a desarrollar el formalismo hamiltoniano en algebroides de Lie. La estructura es similar a la del caso lagrangiano que se acaba de describir.

Sea  $(E, [\cdot, \cdot]_E, \rho)$  un algebroid de Lie sobre una variedad  $Q$ . Para el enfoque hamiltoniano consideramos el fibrado dual,  $\tau^* : E^* \rightarrow Q$  de  $E$ .

### 8.2.1. Elementos geométricos.

En esta subsección vamos a describir los elementos geométricos que son necesarios para desarrollar el formalismo lagrangiano  $k$ -cosimpléctico en algebroides de Lie.

A. La variedad  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$ .

La formulación  $k$ -cosimpléctica de las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl, descrita en el Capítulo 6, se desarrolla en la variedad  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ , donde recordemos que  $(T_k^1)^*Q$  denota el fibrado tangente de las  $k^1$ -covelocidades de una variedad  $Q$ , esto es, la suma de Whitney de  $k$  copias del fibrado cotangente.

Si pensamos un algebroid de Lie  $E$  como un sustituto del fibrado tangente, su dual  $E^*$  jugará el papel de  $T^*Q$ . Es natural pensar que, en esta situación, la variedad

$$\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \equiv \mathbb{R}^k \times (E^* \oplus \dots \oplus E^*),$$

va a jugar el papel de  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ .

Los elementos de  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$  son de la forma

$$(\mathbf{t}, \mathbf{a}_{\mathbf{q}}^*) = (\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}^*, \dots, a_{k\mathbf{q}}^*).$$

Denotaremos por  $\tilde{\mathbf{p}}^* : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow Q$  la proyección canónica definida por

$$\tilde{\mathbf{p}}^*(\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}^*, \dots, a_{k\mathbf{q}}^*) = \mathbf{q}.$$

A continuación vamos a describir un sistema local de coordenadas en  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$ .



Sea  $(q^i, y_\alpha)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m}$  un sistema de coordenadas locales en un abierto  $(\tau^*)^{-1}(U)$  de  $E^*$ , siendo  $(q^i)_{1 \leq i \leq n}$  las coordenadas en un abierto  $U \subset Q$  de la variedad base  $Q$ . Definimos el sistema de coordenadas locales

$$(t^A, q^i, y_\alpha^A)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq A \leq k}$$

en  $(\tilde{p}^*)^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  como sigue:

$$\begin{aligned} t^A(\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}^*, \dots, a_{k\mathbf{q}}^*) &= t^A(\mathbf{t}), & q^i(\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}^*, \dots, a_{k\mathbf{q}}^*) &= q^i(\mathbf{q}), \\ y_\alpha^A(\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}^*, \dots, a_{k\mathbf{q}}^*) &= y_\alpha(a_{A\mathbf{q}}^*), \end{aligned} \quad (8.32)$$

donde  $(\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}^*, \dots, a_{k\mathbf{q}}^*) \in \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$ .

Estas coordenadas dotan a  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$  de una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $n + k(1 + m)$ .

B. La prolongación de un algebroide de Lie mediante  $\tilde{p}^*: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow Q$ .

En la sección 5.2 del capítulo 5 hemos recordado la definición de  $\mathcal{T}^E P$ , esto es la prolongación de un algebroide de lie  $E$  mediante una fibración  $\pi: P \rightarrow Q$ .

En la descripción del formalismo hamiltoniano  $k$ -cosimpléctico vamos a considerar el caso particular

$$P = \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$$

con la fibración

$$\tilde{p}^*: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow Q,$$

esto es, (véase la Sección 5.2),

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) & \xrightarrow{\rho \tilde{p}^*} & T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \\ \tilde{\tau}_1 \downarrow & & \downarrow T\tilde{p}^* \\ E & \xrightarrow{\rho} & TQ \end{array}$$

y

$$\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) = \{(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}) \in E \times T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) / \rho(a_{\mathbf{q}}) = T\tilde{p}^*(v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)})\}. \quad (8.33)$$

Teniendo en cuenta los contenidos de la Sección 5.2, y considerando el caso particular  $P = \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$  obtenemos:

- (1)  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$  es un algebroide de Lie con variedad base  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$ , proyección

$$\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*} : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$$

y estructura de algebroide de Lie  $([\cdot, \cdot]^{\tilde{p}^*}, \rho^{\tilde{p}^*})$  donde el ancla

$$\rho^{\tilde{p}^*} : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) = E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \rightarrow T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$$

es la proyección sobre el segundo factor.

- (2) Si  $(t^A, q^i, y_\alpha^A)$  denota un sistema local de coordenadas de  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$  entonces el sistema de coordenadas locales inducido en  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$  está dado como sigue:

$$(t^A, q^i, y_\alpha^A, z^\alpha, v_A, w_\alpha^A)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq \ell \leq n', 1 \leq \alpha \leq m}$$

donde, véase (5.15),

$$\begin{aligned} t^A(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}) &= t^A(\mathbf{t}), & z^\alpha(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}) &= y^\alpha(a_{\mathbf{q}}), \\ q^i(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}) &= q^i(\mathbf{q}), & v_A(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}) &= v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}(t^A), \\ y_\alpha^A(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}) &= y_\alpha^A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}), & w_\alpha^A(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}) &= v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}(y_\alpha^A). \end{aligned} \quad (8.34)$$

- (3) De (5.16) obtenemos que el conjunto  $\{\mathcal{Y}^A, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_A^\alpha\}$  definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^A : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* &\rightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \\ (\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*) &\mapsto \mathcal{Y}^A(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*) = (0_{\mathbf{q}}; \frac{\partial}{\partial t^A} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}), \\ \mathcal{X}_\alpha : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* &\rightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \\ (\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*) &\mapsto \mathcal{X}_\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*) = (e_\alpha(\mathbf{q}); \rho_\alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}) \\ \mathcal{V}_A^\alpha : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* &\rightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \\ (\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*) &\mapsto \mathcal{V}_A^\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*) = (0_{\mathbf{q}}; \frac{\partial}{\partial y_\alpha^A} \Big|_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}), \end{aligned} \quad (8.35)$$

es una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*} : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$ .

A partir de ahora denotaremos por  $Sec(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*))$  el conjunto de secciones de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*}$ .

(4) A cada sección

$$\xi : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$$

de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*}$  le asociamos un campo de vectores por medio del ancla del algebroid

$$\rho^{\tilde{p}^*} : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \rightarrow T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*).$$

Si  $\xi$  se escribe localmente como sigue:

$$\xi = \xi_A \mathcal{Y}^A + \xi^\alpha \mathcal{X}_\alpha + \xi_A^\alpha \mathcal{V}_A^\alpha \in Sec(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*))$$

entonces, reescribiendo la expresión (5.17) para este caso particular obtenemos,

$$\rho^{\tilde{p}^*}(\xi) = \xi_A \frac{\partial}{\partial t^A} + \rho_\alpha^i \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi_A^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha^A} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*). \quad (8.36)$$

(5) El corchete de Lie de secciones de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*}$  queda determinado a partir del corchete de los elementos de una base de secciones,

$$\begin{aligned} \llbracket \mathcal{Y}^A, \mathcal{Y}^B \rrbracket^{\tilde{p}^*} &= 0, & \llbracket \mathcal{Y}^A, \mathcal{X}_\alpha \rrbracket^{\tilde{p}^*} &= 0, & \llbracket \mathcal{Y}^A, \mathcal{V}_B^\beta \rrbracket^{\tilde{p}^*} &= 0, \\ \llbracket \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta \rrbracket^{\tilde{p}^*} &= \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}_\gamma, & \llbracket \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_B^\beta \rrbracket^{\tilde{p}^*} &= 0, & \llbracket \mathcal{V}_A^\alpha, \mathcal{V}_B^\beta \rrbracket^{\tilde{p}^*} &= 0. \end{aligned} \quad (8.37)$$

(6) Si  $\{\mathcal{Y}_A, \mathcal{X}^\alpha, \mathcal{V}_\alpha^A\}$  es la base dual de  $\{\mathcal{Y}^A, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_A^\alpha\}$ , de las expresiones (5.20) que caracterizan la diferencial exterior en el algebroid prolongación obtenemos que

$$d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)} f = \frac{\partial f}{\partial t^A} \mathcal{Y}_A + \rho_\alpha^i \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathcal{X}^\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_\alpha^A} \mathcal{V}_\alpha^A, \quad (8.38)$$

para cada  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$  y además

$$\begin{aligned} d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)} \mathcal{Y}_A &= 0, \\ d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)} \mathcal{X}^\gamma &= -\frac{1}{2} \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{X}^\beta, \\ d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)} \mathcal{V}_\gamma^A &= 0. \end{aligned} \quad (8.39)$$

A lo largo de esta sección denotaremos la diferencial exterior  $d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)}$  simplemente por  $d$ .

**Observación 8.22** En el caso particular  $E = TQ$  la variedad  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$  se identifica con  $T(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q)$ .

En efecto, en este caso consideramos la prolongación de  $TQ$  sobre

$$(\widehat{\pi}_Q)_1 : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow Q.$$

Así de (8.2) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{TQ}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k T^*Q) &= \mathcal{T}^{TQ}(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) \\ &= \{(u_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}}^*)}) \in TQ \times T(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) / u_{\mathbf{q}} = T(\widehat{\pi}_Q)_1(v_{w_{\mathbf{q}}^*})\} \\ &= \{(T(\widehat{\pi}_Q)_1(v_{(\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}}^*)}), v_{(\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}}^*)}) \in TQ \times T(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) / (\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}}^*) \in \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q\} \\ &\equiv \{v_{(\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}}^*)} \in T(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) / (\mathbf{t}, w_{\mathbf{q}}^*) \in \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q\} \equiv T(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q). \end{aligned}$$

◇

C. El fibrado vectorial  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$ .

En la descripción de la formulación hamiltoniana  $k$ -cosimpléctica en algebroides de Lie tienen especial interés los campos de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ , esto es, las secciones de

$$\tau_{\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q}^k : T_k^1(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) \rightarrow \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q.$$

De modo análogo a lo que ocurría en el formalismo  $k$ -simpléctico en algebroides de Lie el fibrado

$$\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$$

jugará el papel de

$$T_k^1(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) = T(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) \oplus \dots \oplus T(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q).$$

Denotaremos por  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$  la suma de Whitney sobre  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$  de  $k$  copias del algebroide de Lie  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$ , esto es,

$$(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) := \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*),$$

y consideramos la proyección canónica

$$\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*}^k : (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*.$$

En la descripción hamiltoniana  $k$ -cosimpléctica en algebroides de lie nos interesará considerar secciones de este fibrado. Además a partir del ancla

$$\rho^{\tilde{p}*} : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \rightarrow T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$$

podemos definir un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$  asociado a cada sección de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*}^k$ , tal como veremos en el resultado siguiente:

**Proposición 8.23** Sea  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$  una sección de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*}^k$ . Entonces

$$(\rho^{\tilde{p}*}(\xi_1), \dots, \rho^{\tilde{p}*}(\xi_k)) : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow T_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$$

es un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$ . Recordemos que la aplicación

$$\rho^{\tilde{p}*} : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \rightarrow T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$$

denota el ancla del algebroid  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$ .

*Demostración:*

Es una consecuencia directa del Lema 5.7 y del hecho de que cada sección  $\xi$  induce una familia de  $k$  secciones de  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$ . Cada una de estas secciones se obtiene proyectando sobre la  $A$ -ésima copia de  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$  en  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$ .

□

Los campos de  $k$ -vectores que se obtienen a partir de esta última proposición van a jugar un papel fundamental en la descripción del formalismo hamiltoniano  $k$ -cosimpléctico en algebroides de Lie.

Vamos ahora a calcular la expresión local del campo de  $k$ -vectores asociado a una sección  $\xi$ .

Sea  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  una sección de  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$ . Entonces cada

$$\xi_A: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$$

es una sección de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*}$ .

Sea ahora  $\{\mathcal{Y}^A, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_A^\alpha\}$  una base local de secciones de

$$\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*}: \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*.$$

Entonces cada  $\xi_A$  se escribe localmente en esta base como sigue:

$$\xi_A = (\xi_A)_B \mathcal{Y}^B + \xi_A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + (\xi_A)_\alpha^B \mathcal{V}_B^\alpha \in \text{Sec}(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)), \quad 1 \leq A \leq k.$$

De (8.36) obtenemos que el campo de vectores en  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$  asociado a  $\xi_A$  tiene la siguiente expresión local:

$$\rho^{\tilde{p}^*}(\xi_A) = (\xi_A)_B \frac{\partial}{\partial t^B} + \rho_\alpha^i \xi_A^\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + (\xi_A)_\alpha^B \frac{\partial}{\partial y_\alpha^B} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*). \quad (8.40)$$

#### D. Las secciones de Liouville

A continuación vamos a introducir  $k$  secciones del fibrado vectorial

$$(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*))^* \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*,$$

dual del fibrado prolongación que estamos considerando en este apartado. Estas secciones nos permitirán describir las ecuaciones de Hamilton en el contexto que nos proporcionan los algebroides de Lie.

**Definición 8.24** *Se llaman **secciones de Liouville** a las secciones del fibrado vectorial  $(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*))^* \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$  definidas por:*

$$\begin{aligned} \Theta^A: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* &\longrightarrow (\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*))^* & 1 \leq A \leq k, \\ (\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*) &\longmapsto \Theta_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}^A \end{aligned}$$

en donde  $\Theta_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}^A$  es la función definida como sigue:

$$\begin{aligned} \Theta_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}^A : (\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*))_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}) &\longmapsto \Theta_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}^A(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}) = b_{A\mathbf{q}}^*(a_{\mathbf{q}}), \end{aligned} \quad (8.41)$$

con  $a_{\mathbf{q}} \in E$ ,  $(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*) = (\mathbf{t}, b_{1\mathbf{q}}^*, \dots, b_{k\mathbf{q}}^*) \in \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$  y  $v_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)} \in T_{(\mathbf{t}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}^*)}(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$ .

A partir de las 1-secciones  $\Theta^1, \dots, \Theta^k$  se definen las 2-secciones

$$\Omega^A : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*))^* \wedge (\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*))^*, \quad 1 \leq A \leq k$$

por

$$\Omega^A = -d\Theta^A,$$

donde  $d$  denota la diferencial exterior  $d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)}$  en el algebroid  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$ , véase (8.38).

Reescribiendo el apartado (2) de la Definición 5.2 de la diferencial exterior de un algebroid de Lie para el algebroid  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned} \Omega_L^A(\xi_1, \xi_2) &= -d\Theta^A(\xi_1, \xi_2) \\ &= [\rho^{\tilde{\mathbf{p}}^*}(\xi_2)](\Theta^A(\xi_1)) - [\rho^{\tilde{\mathbf{p}}^*}(\xi_1)](\Theta^A(\xi_2)) + \Theta^A([\xi_1, \xi_2]^{\tilde{\mathbf{p}}^*}), \end{aligned} \quad (8.42)$$

para todo par  $\xi_1, \xi_2 \in \text{Sec}(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*))$  donde  $(\rho^{\tilde{\mathbf{p}}^*}, [\cdot, \cdot]^{\tilde{\mathbf{p}}^*})$  denota la estructura de algebroid de Lie de  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$ .

A continuación escribimos las expresiones locales de las secciones  $\Theta^A$  y  $\Omega^A$ .

Consideremos

$$\{\mathcal{Y}_B, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_B^\beta\}$$

una base local de secciones de  $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*} : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$  y

$$\{\mathcal{Y}^B, \mathcal{X}^\alpha, \mathcal{V}_\beta^B\}$$

su base dual. Entonces de la definición de  $\Theta^A$  y de (8.35) se obtiene la siguiente expresión local:

$$\Theta^A = \sum_{\beta=1}^m y_\beta^A \mathcal{X}^\beta, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (8.43)$$

Así de las expresiones (8.39) y (8.43) se obtiene la expresión local de  $\Omega^A$ , esto es,

$$\Omega^A = \sum_{\beta} \mathcal{X}^{\beta} \wedge \mathcal{V}_{\beta}^A + \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma, \delta} y_{\delta}^A \mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\delta} \mathcal{X}^{\beta} \wedge \mathcal{X}^{\gamma}, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (8.44)$$

**Observación 8.25** Si consideramos el caso particular  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$ , entonces

$$\Omega^A(X, Y) = \omega^A(X, Y), \quad 1 \leq A \leq k.$$

donde  $X, Y$  son campos de vectores en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  y  $\omega^1, \dots, \omega^k$  denotan las 2-formas canónicas del formalismo  $k$ -cosimpléctico estándar).

### 8.2.2. Formalismo hamiltoniano.

En esta sección describimos el formalismo hamiltoniano  $k$ -cosimpléctico en algebroides de Lie y veremos que el formalismo hamiltoniano  $k$ -cosimpléctico estándar, véase capítulo 6, es un caso particular del desarrollado aquí.

#### A. Ecuaciones de Hamilton en algebroides de Lie.

Consideramos una función  $H: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow \mathbb{R}$  a la que denominamos función hamiltoniana.

El siguiente teorema es la versión, en algebroides de Lie, del Teorema 6.13 que resume la formulación hamiltoniana  $k$ -cosimpléctica estándar.

**Teorema 8.26** Sea  $H: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow \mathbb{R}$  una función hamiltoniana y

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$$

una sección de  $\tilde{\tau}^k_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*}$  tal que

$$\mathcal{Y}_B(\xi_A) = \delta_A^B, \quad \sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \Omega^A = dH - \sum_{A=1}^k \frac{\partial H}{\partial t^A} \mathcal{Y}_A, \quad (8.45)$$



donde recordemos que  $d$  denota la diferencial exterior  $d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)}$  en el algebroid de Lie  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$ .

Si  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$ ,  $\psi(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \psi^i(\mathbf{t}), \psi_\alpha^A(\mathbf{t}))$  es una sección integral de  $\xi$ , entonces  $\psi$  es una solución del siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} &= \left. \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^A} \right|_{\psi(\mathbf{t})}, \\ \sum_{A=1}^k \left. \frac{\partial \psi_\beta^A}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} &= - \left( \left. \rho_\beta^i \frac{\partial H}{\partial q^i} \right|_{\psi(\mathbf{t})} + \sum_{A=1}^k \psi_\gamma^A(\mathbf{t}) \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \left. \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^A} \right|_{\psi(\mathbf{t})} \right). \end{aligned} \quad (8.46)$$

Denominaremos a este sistema **ecuaciones de Hamilton en algebroides de Lie**.

*Demostración:*

Para obtener las secciones  $\xi$  que son solución de las ecuaciones (8.46) procedemos de modo análogo que en el formalismo Lagrangiano desarrollado en la sección 8.1.3.

Sea  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$  una sección verificando las ecuaciones (8.45)

Si cada  $\xi_A : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$  se escribe localmente como sigue:

$$\xi_A = (\xi_A)_B \mathcal{Y}^B + \xi_A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + (\xi_A)_\alpha^B \mathcal{V}_B^\alpha$$

entonces teniendo en cuenta esta expresión local y la expresión local (8.44) de  $\Omega^A$  se verifica:

$$\sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \Omega^A = \xi_A^\alpha \mathcal{V}_\alpha^A + \left( y_\gamma^A \mathcal{C}_{\beta\alpha}^\gamma \xi_A^\beta - \sum_{A=1}^k (\xi_A)_\alpha^A \right) \mathcal{X}^\alpha. \quad (8.47)$$

Por otra parte, de (8.38) obtenemos:

$$dH - \sum_{A=1}^k \frac{\partial H}{\partial t^A} \mathcal{Y}_A = \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial q^i} \mathcal{X}^\alpha + \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^A} \mathcal{V}_\alpha^A. \quad (8.48)$$

De (8.47) y (8.48) obtenemos que  $\xi$  es solución de (8.45) si, y sólo si, las funciones

$(\xi_A)_B, \xi_A^\alpha, (\xi_A)_\alpha^B \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$  satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (\xi_A)_B &= \delta_{AB}, \\ \xi_A^\alpha &= \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^A}, \\ \sum_{A=1}^k (\xi_A)_\alpha^A &= y_\gamma^A \mathcal{C}_{\beta\alpha}^\gamma \xi_A^\beta - \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{aligned} \quad (8.49)$$

o equivalentemente

$$(\xi_A)_B = \delta_{AB} \quad , \quad \xi_A^\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^A} \quad , \quad \sum_{A=1}^k (\xi_A)_\alpha^A = - \left( \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial q^i} + \sum_{A=1}^k \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma y_\gamma^A \frac{\partial H}{\partial y_\beta^A} \right). \quad (8.50)$$

Sea

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \\ \mathbf{t} &\mapsto \psi(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \psi^i(\mathbf{t}), \psi_\alpha^A(\mathbf{t})) \end{aligned} \quad ,$$

una sección integral de la sección  $\xi$ , esto es,  $\psi$  es una sección integral del campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$  asociado a  $\xi$  y definido por, (véase la proposición 8.23),

$$(\rho^{\tilde{\mathbf{p}}}^*(\xi_1), \dots, \rho^{\tilde{\mathbf{p}}}^*(\xi_k)),$$

donde

$$\rho^{\tilde{\mathbf{p}}}^* : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \rightarrow T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$$

denota el ancla del algebroid  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$ .

Entonces, por ser  $\psi$  sección integral se verifica:

$$\rho_\alpha^i(\xi_A^\alpha \circ \psi) = \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \quad , \quad (\xi_A)_\beta^B \circ \psi = \frac{\partial \psi_\beta^B}{\partial t^A}. \quad (8.51)$$

De (8.50) y (8.51) obtenemos que  $\psi$  es solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} &= \left. \rho_\alpha^i \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^B} \right|_{\psi(\mathbf{t})} \\ \sum_{A=1}^k \left. \frac{\partial \psi_\beta^A}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} &= - \left( \left. \rho_\beta^i \frac{\partial H}{\partial q^i} \right|_{\psi(\mathbf{t})} + \sum_{A=1}^k \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \psi_\gamma^A(\mathbf{t}) \left. \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^A} \right|_{\psi(\mathbf{t})} \right). \end{aligned} \quad (8.52)$$

B. Caso particular: formalismo hamiltoniano  $k$ -cosimpléctico estándar

Para finalizar esta sección, y de modo análogo a como se hizo en el formalismo lagrangiano en algebroides de Lie vamos a describir el formalismo hamiltoniano  $k$ -cosimpléctico estándar (descrito en el capítulo 6, sección 6.1.2 ) como un caso particular de la teoría aquí desarrollada.

Sea  $E = TQ$ , la aplicación ancla  $\rho$  es la identidad en  $TQ$ , y las constantes de estructura son  $\mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma = 0$ .

En este caso se tiene:

- La variedad  $\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$  se identifica con  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ ,  $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$  con  $T(\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q)$  y  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$  con  $T_k^1(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q)$ .

- Una sección

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$$

se corresponde con un campo de  $k$ -vectores  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ , esto es,  $\xi$  es una sección de

$$\tau_{\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q}^k : T_k^1(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) \rightarrow \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q.$$

- Sea  $f$  una función en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  entonces

$$d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)}(Y) = df(Y)$$

donde  $df$  denota la diferencial usual y  $Y$  es un campo de vectores en la variedad  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ .

- Se verifica que

$$\Omega^A(X, Y) = \omega_L^A(X, Y), \quad (A = 1, \dots, k),$$

donde  $\omega^1, \dots, \omega^k$  denota las 2-formas de la estructura  $k$ -cosimpléctica en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ .

- Teniendo en cuenta los cuatro comentarios anteriores la ecuación (8.46) se escribe en este caso particular como sigue:

$$dt^A(\xi_B) = \delta_B^A \quad , \quad \sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \omega^A = dH - \sum_{A=1}^k \frac{\partial H}{\partial t^A} dt^A.$$

Así, del teorema 8.26 y los comentarios anteriores, deducimos el siguiente corolario el cual es un resumen del formalismo hamiltoniano  $k$ -cosimpléctico estándar, véase la sección 6.1.2

**Corolario 8.27** *Sea  $H : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función hamiltoniana y  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$  tal que*

$$dt^A(\xi_B) = \delta_B^A \quad , \quad \sum_{A=1}^k \iota_{\xi_A} \omega^A = dH - \sum_{A=1}^k \frac{\partial H}{\partial t^A} dt^A.$$

*Si  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ ,  $\psi(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \psi^i(\mathbf{t}), \psi_i^A(\mathbf{t}))$  es una sección integral del campo de  $k$ -vectores  $\xi$ , entonces es una solución de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (6.6).*

□

La relación entre los elementos geométricos del formalismo  $k$ -cosimpléctico hamiltoniano estándar y en algebroides de Lie, que describimos anteriormente, se recoge de modo esquemático a continuación:

■ Funciones hamiltonianas.

- Algebroides de Lie:

$$H : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

- Estándar:

$$H : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}.$$

■ Secciones de Liouville.

- Algebroides de Lie:

$$\Omega^A : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*))^* \wedge (\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*))^*.$$

- Estándar:

$$\omega^A : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow T^*(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) \wedge T^*(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q).$$

■ Ecuaciones algebraicas.

• Algebroides de Lie:

$$\mathfrak{y}_B(\xi_A) = \delta_A^B \quad , \quad \sum_{A=1}^k \imath_{\xi_A} \Omega^A = d^{\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)} H - \sum_{A=1}^k \frac{\partial H}{\partial t^A} \mathfrak{y}_A \quad ,$$

donde

$$\xi : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow (\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$$

es una sección del fibrado  $(\mathcal{T}^E)_k^1(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$ .

• Estándar:

$$dt^A(\xi_B) = \delta_B^A \quad , \quad \sum_{A=1}^k \imath_{\xi_A} \omega^A = dH - \sum_{A=1}^k \frac{\partial H}{\partial t^A} dt^A \quad .$$

donde

$$(\xi_1 \dots, \xi_k) : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow T_k^1(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q)$$

es un campo de  $k$ -vectores en  $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ .

■ Ecuaciones de campo.

• Algebroides de Lie:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} &= \rho_\alpha^i \left. \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^B} \right|_{\psi(\mathbf{t})} \\ \sum_{A=1}^k \left. \frac{\partial \psi_\beta^A}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} &= - \left( \rho_\beta^i \left. \frac{\partial H}{\partial q^i} \right|_{\psi(\mathbf{t})} + \sum_{A=1}^k \mathfrak{C}_{\alpha\beta}^\gamma \psi_\gamma^A(\mathbf{t}) \left. \frac{\partial H}{\partial y_\alpha^A} \right|_{\psi(\mathbf{t})} \right) . \end{aligned}$$

Las soluciones de estas ecuaciones son aplicaciones

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \\ \mathbf{t} &\mapsto \psi(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \psi^i(\mathbf{t}), \psi_\alpha^A(\mathbf{t})) \end{aligned}$$

- Estándar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} &= \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \\ \sum_{A=1}^k \frac{\partial \psi_i^A}{\partial t^A} &= - \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} . \end{aligned}$$

Las soluciones de estas ecuaciones son aplicaciones

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \\ \mathbf{t} &\mapsto \psi(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \psi^i(\mathbf{t}), \psi_i^A(\mathbf{t})) \end{aligned}$$

### 8.3. Equivalencia entre el formalismo lagrangiano y el hamiltoniano.

En la sección 6.3 del Capítulo 6 de esta memoria recordamos que las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana  $k$ -cosimplécticas son equivalentes cuando el lagrangiano  $L : \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  es hiperregular.

De modo análogo, en la sección 5.5 demostramos que se tiene un resultado similar entre las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana  $k$ -simplécticas en algebroides de Lie.

En esta sección se recoge el resultado análogo en el contexto  $k$ -cosimpléctico en algebroides de Lie.

Sea  $L : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano.

**Definición 8.28** *La transformación de Legendre asociada a  $L$  es la aplicación*

$$Leg : \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$$

*definida por*

$$Leg(\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) = \left( \mathbf{t}, [Leg(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}})]^1, \dots, [Leg(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}})]^k \right)$$

*donde*

$$[Leg(a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}})]^A(u_{\mathbf{q}}) = \frac{d}{ds} L(\mathbf{t}, a_{1\mathbf{q}}, \dots, a_{A\mathbf{q}} + su_{\mathbf{q}}, \dots, a_{k\mathbf{q}}) \Big|_{s=0} ,$$

*siendo  $u_{\mathbf{q}} \in E_{\mathbf{q}}$ .*

La expresión local de la aplicación  $Leg$  es

$$Leg(t^A, q^i, y_A^\alpha) = (t^A, q^i, \frac{\partial L}{\partial y_A^\alpha}).$$

A partir de esta expresión local es sencillo probar que el lagrangiano  $L$  es regular si, y sólo si,  $Leg$  es un difeomorfismo local.

**Observación 8.29** Cuando se considera el algebroid de Lie  $E = TQ$  la transformación de Legendre definida arriba coincide con la transformación de Legendre del formalismo  $k$ -cosimpléctico, véase la definición 6.18.

La transformación de Legendre induce una aplicación

$$\mathcal{T}^E Leg : \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \rightarrow \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*)$$

definida por

$$\mathcal{T}^E Leg(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}})}) = \left( a_{\mathbf{q}}, (Leg)_*(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}})(v_{(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}})}) \right),$$

donde  $a_{\mathbf{q}} \in E_{\mathbf{q}}$ ,  $(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  y

$$(a_{\mathbf{q}}, v_{(\mathbf{t}, b_{\mathbf{q}})}) \in \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) \equiv E \times_{TQ} T(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E).$$

**Teorema 8.30** El par  $(\mathcal{T}^E Leg, Leg)$  es un morfismo de algebroides de Lie,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E) & \xrightarrow{\mathcal{T}^E Leg} & \mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*) \\ \downarrow \tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E} & & \downarrow \tilde{\tau}_{\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*} \\ \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E & \xrightarrow{Leg} & \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \end{array}$$

entre  $(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E), \rho^{\tilde{p}Q}, [\cdot, \cdot]^{\tilde{p}Q})$  y  $(\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*), \rho^{\tilde{p}Q^*}, [\cdot, \cdot]^{\tilde{p}Q^*})$ .

Además si  $\Theta_L^A$  y  $\Omega_L^A$  (respectivamente,  $\Theta^A$  y  $\Omega^A$ ) son las secciones lagrangianas asociadas a una función lagrangiana  $L: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}$  (respectivamente, las secciones de Liouville en  $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$ ), entonces

$$(\mathcal{T}^E Leg, Leg)^* \Theta^A = \Theta_L^A, \quad (\mathcal{T}^E Leg, Leg)^* \Omega^A = \Omega_L^A, \quad 1 \leq A \leq k. \quad (8.53)$$

*Demostración:*

Es análoga a la demostración del Teorema 8.30.

□

**Observación 8.31** En el caso  $E = TQ$  y  $\rho = id_{TQ}$  la afirmación de este teorema se corresponde con la relación entre las formas lagrangianas y hamiltonianas del formalismo  $k$ -simpléctico estándar, véase el capítulo 6 de esta memoria.

◇

Si la transformación de Legendre  $Leg$  es un difeomorfismo global diremos que el lagrangiano es hiperregular. En este caso ambos formalismos, el lagrangiano y el hamiltoniano, son equivalentes.

Cuando el lagrangiano  $L$  es hiperregular, existe un hamiltoniano  $H$  definido por

$$H = E_L \circ (Leg)^{-1},$$

donde  $E_L$  es la función energía asociada a  $L$  definida en (8.26) y  $(Leg)^{-1}$  es la inversa de la transformación de Legendre.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* & \xrightarrow{Leg^{-1}} & \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \\ & \searrow H & \downarrow E_L \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

**Lema 8.32** Si el lagrangiano  $L$  es hiperregular, entonces  $\mathcal{T}^E Leg$  es un difeomorfismo.

*Demostración:*

Esta demostración es análoga a la demostración del Lema 5.53

□



Mediante un cálculo similar al desarrollado en la demostración del Teorema 5.54 obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 8.33** *Sea  $L$  un lagrangiano hiperregular. Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de aplicaciones  $\eta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E$  tal que  $\eta$  es una sección integral de una sección solución  $\xi_L$  de las ecuaciones de Euler-Lagrange (8.28) y el conjunto de aplicaciones  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$  que son secciones integrales de alguna solución  $\xi_H$  de las ecuaciones hamiltonianas (8.46).*

*Demostración:*

Es análoga a la demostración del Teorema 5.54 teniendo en cuenta la relación entre  $\xi_L = (\xi_L^1, \dots, \xi_L^k)$  y  $\xi_H = (\xi_H^1, \dots, \xi_H^k)$  dada por:

$$\xi_H^A \circ Leg = \mathcal{T}^E Leg \circ \xi_L^A, \quad A = 1, \dots, k.$$

□



# Apéndice A

## Simetrías y leyes de conservación

En este apéndice se desarrollan las demostraciones completas de algunas proposiciones del capítulo 2. El motivo de incluirlas en este apéndice y no en el capítulo es por ser demasiado extensas y por ello dificultar la lectura del correspondiente capítulo de la memoria aquí presentada.

### A. Caso hamiltoniano.

La siguiente proposición se corresponde con la Proposición 2.7 del capítulo 2.

**Proposición** Sea  $\Phi: (T_k^1)^*Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$  un difeomorfismo. Si

$$\Phi^*\omega^A = \omega^A, \quad 1 \leq A \leq k \quad \text{y} \quad \Phi^*H = H \text{ (salvo constantes).}$$

entonces  $\Phi$  es una simetría del sistema hamiltoniano  $k$ -simpléctico  $((T_k^1)^*Q, \omega^A, H)$ .

*Demostración:*

Tenemos que probar que, si  $\psi: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^*Q$  es una solución de las ecuaciones de Hamilton-de Donder-Weyl (1.13), entonces  $\Phi \circ \psi$  es también una solución, esto es,

$$(a) \quad \left. \frac{\partial H}{\partial q^i} \right|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} = - \sum_{A=1}^k \left. \frac{\partial (p_i^A \circ \Phi \circ \psi)}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} \quad , \quad (b) \quad \left. \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \right|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} = \left. \frac{\partial (q^i \circ \Phi \circ \psi)}{\partial t^A} \right|_{\mathbf{t}} .$$

Considerando un sistema local de coordenadas podemos escribir el difeomorfismo  $\Phi: (T_k^1)^*Q \rightarrow (T_k^1)^*Q$  como sigue:

$$\Phi(q^j, p_j^B) = (\Phi^i(q^j, p_j^B), \Phi_i^A(q^j, p_j^B))$$

y por tanto la hipótesis  $\Phi^*H = H$  se escribe localmente del siguiente modo:

$$H(q^j, p_j^B) = (H \circ \Phi)(q^j, p_j^B) = H(\Phi^i(q^j, p_j^B), \Phi_i^A(q^j, p_j^B)) .$$

de donde se obtienen las identidades

$$\left. \frac{\partial H}{\partial q^j} \right|_w = \left. \frac{\partial H}{\partial q^i} \right|_{\Phi(w)} \left. \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \right|_w + \left. \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \right|_{\Phi(w)} \left. \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \right|_w \quad (\text{A.1})$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial p_j^A} \right|_w = \left. \frac{\partial H}{\partial q^i} \right|_{\Phi(w)} \left. \frac{\partial \Phi^i}{\partial p_j^A} \right|_w + \left. \frac{\partial H}{\partial p_i^B} \right|_{\Phi(w)} \left. \frac{\partial \Phi_i^B}{\partial p_j^A} \right|_w \quad (\text{A.2})$$

para todo  $w \in (T_k^1)^*Q$ .

En segundo lugar, de la hipótesis  $\Phi^*\omega^A = \omega^A$ ,  $1 \leq A \leq k$  deducimos

$$0 = \left. \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \right|_w \left. \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^k} \right|_w \quad (\text{A.3})$$

$$0 = \left. \frac{\partial \Phi^i}{\partial p_j^B} \right|_w \left. \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial p_k^C} \right|_w, \quad 1 \leq A \leq k \quad (\text{A.4})$$

$$\delta_j^k \delta_C^A = \left. \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \right|_w \left. \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial p_k^C} \right|_w - \left. \frac{\partial \Phi^i}{\partial p_k^C} \right|_w \left. \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \right|_w . \quad (\text{A.5})$$

Además, al ser  $\Phi$  un difeomorfismo,  $\Phi \circ \Phi^{-1} = id_{(T_k^1)^*Q}$ . Aplicando la regla de la cadena obtenemos:

$$\delta_k^i = \left. \frac{\partial(\Phi \circ \Phi^{-1})^i}{\partial q^k} \right|_w = \left. \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \right|_{\Phi^{-1}(w)} \left. \frac{\partial(\Phi^{-1})^j}{\partial q^k} \right|_w + \left. \frac{\partial \Phi^i}{\partial p_j^A} \right|_{\Phi^{-1}(w)} \left. \frac{\partial(\Phi^{-1})_j^A}{\partial q^k} \right|_w \quad (\text{A.6})$$

$$0 = \left. \frac{\partial(\Phi \circ \Phi^{-1})^i}{\partial p_k^B} \right|_w = \left. \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \right|_{\Phi^{-1}(w)} \left. \frac{\partial(\Phi^{-1})^j}{\partial p_k^B} \right|_w + \left. \frac{\partial \Phi^i}{\partial p_j^A} \right|_{\Phi^{-1}(w)} \left. \frac{\partial(\Phi^{-1})_j^A}{\partial p_k^B} \right|_w \quad (\text{A.7})$$

$$0 = \left. \frac{\partial(\Phi \circ \Phi^{-1})_i^A}{\partial q^j} \right|_w = \left. \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^k} \right|_{\Phi^{-1}(w)} \left. \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial q^j} \right|_w + \left. \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial p_k^B} \right|_{\Phi^{-1}(w)} \left. \frac{\partial(\Phi^{-1})_k^B}{\partial q^j} \right|_w \quad (\text{A.8})$$

$$\delta_j^i \delta_C^A = \left. \frac{\partial(\Phi \circ \Phi^{-1})_i^A}{\partial p_j^C} \right|_w = \left. \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^k} \right|_{\Phi^{-1}(w)} \left. \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial p_j^C} \right|_w + \left. \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial p_k^B} \right|_{\Phi^{-1}(w)} \left. \frac{\partial(\Phi^{-1})_k^B}{\partial p_j^C} \right|_w . \quad (\text{A.9})$$

De las ecuaciones (A.4), (A.5), (A.6) y (A.8) se obtiene

$$\left. \frac{\partial \Phi_s^A}{\partial p_k^C} \right|_{\Phi^{-1}(w)} = \delta_C^A \left. \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial q^s} \right|_w , \quad (\text{A.10})$$

de (A.4), (A.5), (A.8) y (A.9) obtenemos

$$\delta_D^A \frac{\partial \Phi^s}{\partial p_k^C} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} = -\delta_C^A \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial p_s^D} \Big|_w, \quad (\text{A.11})$$

de (A.3), (A.5), (A.6) y (A.8) se sigue que

$$\frac{\partial \Phi_s^A}{\partial q^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} = -\frac{\partial(\Phi^{-1})_j^A}{\partial q^s} \Big|_w, \quad (\text{A.12})$$

y de (A.3), (A.5), (A.7) y (A.9) deducimos

$$\frac{\partial \Phi^s}{\partial q^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} = \delta_B^A \frac{\partial(\Phi^{-1})_j^A}{\partial p_s^B} \Big|_w. \quad (\text{A.13})$$

Para finalizar vamos a comprobar que las identidades (a) y (b) se verifican:

$$\begin{aligned} & \sum_{A=1}^k \frac{\partial(\Phi \circ \psi)_i^A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} = \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \psi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial p_j^B} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \psi_j^B}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} = \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \psi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \\ & + \sum_{A=1}^k \delta_B^A \frac{\partial(\Phi^{-1})^j}{\partial q^i} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \psi_j^B}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} = \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_j^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} - \frac{\partial(\Phi^{-1})^j}{\partial q^i} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \\ & = \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial H}{\partial q^k} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^k}{\partial p_j^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} + \frac{\partial H}{\partial p_k^B} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_k^B}{\partial p_j^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\} \\ & - \frac{\partial(\Phi^{-1})^j}{\partial q^i} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial H}{\partial q^k} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^k}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} + \frac{\partial H}{\partial p_k^B} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_k^B}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\} \\ & = \frac{\partial H}{\partial q^k} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^k}{\partial p_j^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} - \frac{\partial(\Phi^{-1})^j}{\partial q^i} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^k}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\} \\ & + \frac{\partial H}{\partial p_k^B} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_k^B}{\partial p_j^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} - \frac{\partial(\Phi^{-1})^j}{\partial q^i} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_k^B}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\} \\ & = \frac{\partial H}{\partial q^k} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^k}{\partial p_j^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} - \delta_i^k + \frac{\partial \Phi^k}{\partial p_l^B} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial(\Phi^{-1})_l^B}{\partial q^i} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \right\} \\ & + \frac{\partial H}{\partial p_k^B} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_k^B}{\partial p_j^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} + \frac{\partial \Phi_k^B}{\partial p_j^C} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial(\Phi^{-1})_j^C}{\partial q^i} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \right\} \\ & = \frac{\partial H}{\partial q^k} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^k}{\partial p_j^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} - \delta_i^k - \frac{\partial \Phi^k}{\partial p_l^B} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_i^B}{\partial q^l} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial H}{\partial p_k^B} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial \Phi_i^A}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_k^B}{\partial p_j^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} - \frac{\partial \Phi_k^B}{\partial p_j^C} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_i^C}{\partial q^j} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\} \\
& = -\delta_i^k \frac{\partial H}{\partial q^k} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} + 0 \frac{\partial H}{\partial p_k^B} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} = - \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} .
\end{aligned}$$

Así hemos probado que el primer grupo de las ecuaciones de Hamilton-de Donder-Weyl se verifica. Comprobemos ahora que el segundo grupo también se verifica.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\Phi \circ \psi)^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} &= \sum_{B=1}^k \delta_A^B \frac{\partial(\Phi \circ \psi)^i}{\partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} = \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \psi^k}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \sum_{B=1}^k \delta_A^B \frac{\partial \Phi^i}{\partial p_k^C} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \psi_k^C}{\partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \\
&= \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \psi^k}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \sum_{B=1}^k \delta_C^B \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial p_i^A} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \psi_k^C}{\partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \\
&= \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \psi^k}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial p_i^A} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \sum_{B=1}^k \frac{\partial \psi_k^B}{\partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \\
&= \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} + \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial p_i^A} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \\
&= \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial p_k^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} + \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_j^B}{\partial p_k^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\} \\
&+ \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial p_i^A} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} + \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_j^B}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\} \\
&= \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial p_k^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} + \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial p_i^A} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\} \\
&+ \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_j^B}{\partial p_k^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} + \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial p_i^A} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_j^B}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\} \\
&= \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial p_k^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} - \frac{\partial(\Phi^{-1})^B}{\partial p_i^A} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial p_l^B} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\} \\
&+ \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_j^B}{\partial p_k^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} + \delta_i^j \delta_A^B - \frac{\partial(\Phi^{-1})^C}{\partial p_i^A} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_j^B}{\partial p_l^C} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\} \\
&= \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial p_k^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} - \delta_A^B \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial p_k^B} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \left\{ \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_j^B}{\partial p_k^A} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} + \delta_i^j \delta_B^A - \delta_C^A \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_j^B}{\partial p_k^C} \Big|_{\psi(\mathbf{t})} \right\} \\
& = 0 \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} + \delta_i^j \delta_B^A \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})} = \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{(\Phi \circ \psi)(\mathbf{t})},
\end{aligned}$$

verificándose así la identidad (b).

□

### B. Caso lagrangiano.

El resultado que vamos a demostrar a continuación se corresponde con la Proposición 2.20 del Capítulo 2.

**Proposición** Sea  $L : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$  una función lagrangiana regular y  $\Phi : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$  un difeomorfismo. Si  $\Phi$  verifica

$$\Phi^* \omega_L^A = \omega_L^A, \quad 1 \leq A \leq k \quad \text{y} \quad \Phi^* E_L = E_L \quad (\text{salvo constantes}),$$

entonces  $\Phi$  es una simetría del sistema  $k$ -simpléctico lagrangiano  $(T_k^1 Q, \omega_L^A, E_L)$ .

*Demostración:*

Tenemos que probar:

*Si  $\phi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.44), entonces  $\Phi \circ \phi^{(1)} = \varphi^{(1)}$  siendo  $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$  también una solución de (1.44).*

Sin embargo, lo que vamos a probar aquí, teniendo en cuenta que  $L$  es regular, es la siguiente afirmación equivalente a la anterior:

*$FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)} : U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^* Q$  es una solución de las ecuaciones de Hamilton-de Donder-Weyl (1.13); esto es*

$$\begin{aligned}
(a) \quad \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} &= \frac{\partial (FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \\
(b) \quad \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})(\mathbf{t})} &= - \sum_{A=1}^k \frac{\partial (FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})^i_A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}},
\end{aligned} \tag{A.14}$$

donde el hamiltoniano es  $H = E_L \circ FL^{-1}$ .

En primer lugar consideremos un sistema local de coordenadas en el que el difeomorfismo  $\Phi : T_k^1 Q \rightarrow T_k^1 Q$  lo escribimos como sigue

$$\Phi(q^j, v_B^j) = (\Phi^i(q^j, v_B^j), \Phi_A^i(q^j, v_B^j)).$$

De la hipótesis  $\Phi^* \omega_L^A = \omega_L^A$  deducimos:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_w = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^k}{\partial q^j} \Big|_w + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial q^j} \Big|_w \right) \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^i} \Big|_w \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_w = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^k}{\partial v_B^j} \Big|_w + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial v_B^j} \Big|_w \right) \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^i} \Big|_w \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^k}{\partial q^i} \Big|_w + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial q^i} \Big|_w \right) \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_B^j} \Big|_w \\ 0 & = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^k}{\partial v_B^j} \Big|_w + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial v_B^j} \Big|_w \right) \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_D^m} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

donde  $w \in T_k^1 Q$  es un punto arbitrario.

La segunda hipótesis  $E_L = \Phi^* E_L$  es equivalente a  $FL^* H = (FL \circ \Phi)^* H$  con  $H = E_L \circ FL^{-1}$ . En efecto,

$$FL^* H(q^j, v_B^j) = E_L(q^j, v_B^j) = \Phi^* E_L(q^j, v_B^j) = \Phi^*(FL^* H)(q^j, v_B^j) = (FL \circ \Phi)^* H(q^j, v_B^j)$$

Por lo tanto tenemos:

$$\frac{\partial(FL^* H)}{\partial q^i} \Big|_w = \frac{\partial(FL \circ \Phi)^* H}{\partial q^i} \Big|_w \quad \text{and} \quad \frac{\partial(FL^* H)}{\partial v_A^i} \Big|_w = \frac{\partial(FL \circ \Phi)^* H}{\partial v_A^i} \Big|_w.$$

Teniendo en cuenta la expresión local de la transformación de Legendre, (1.34), se obtiene que la identidad anterior equivalen a las dos identidades siguientes:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{FL(w)} + \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{FL(w)} \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v_B^j} \Big|_w = \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{(FL \circ \Phi)(w)} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^i} \Big|_w \\ & + \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{(FL \circ \Phi)(w)} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_B^j} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^k}{\partial q^i} \Big|_w + \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^k \partial v_B^j} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_A^k}{\partial q^i} \Big|_w \right), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{FL(w)} \frac{\partial^2 L}{\partial v_A^i \partial v_B^j} \Big|_w = \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{(FL \circ \Phi)(w)} \frac{\partial \Phi^j}{\partial v_A^i} \Big|_w \\ & + \frac{\partial H}{\partial p_j^B} \Big|_{(FL \circ \Phi)(w)} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_B^j} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi^k}{\partial v_A^i} \Big|_w + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_B^j} \Big|_{\Phi(w)} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial v_A^i} \Big|_w \right) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$



Por otra parte, puesto que  $\Phi$  es un difeomorfismo se verifica  $\Phi \circ \Phi^{-1} = id_{T_k^1 Q}$ . Aplicando la regla de la cadena sobre esta identidad se obtiene:

$$\delta_k^i = \frac{\partial(\Phi \circ \Phi^{-1})^i}{\partial q^k} \Big|_w = \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})^j}{\partial q^k} \Big|_w + \frac{\partial \Phi^i}{\partial v_A^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})^j_A}{\partial q^k} \Big|_w \quad (\text{A.20})$$

$$0 = \frac{\partial(\Phi \circ \Phi^{-1})^i}{\partial v_B^k} \Big|_w = \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})^j}{\partial v_B^k} \Big|_w + \frac{\partial \Phi^i}{\partial v_A^j} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})^j_A}{\partial v_B^k} \Big|_w \quad (\text{A.21})$$

$$0 = \frac{\partial(\Phi \circ \Phi^{-1})^i_A}{\partial q^j} \Big|_w = \frac{\partial \Phi_A^i}{\partial q^k} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial q^j} \Big|_w + \frac{\partial \Phi_A^i}{\partial v_B^k} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})^k_B}{\partial q^j} \Big|_w \quad (\text{A.22})$$

$$\delta_j^i \delta_C^A = \frac{\partial(\Phi \circ \Phi^{-1})^i_A}{\partial v_C^j} \Big|_w = \frac{\partial \Phi_A^i}{\partial q^k} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})^k}{\partial v_C^j} \Big|_w + \frac{\partial \Phi_A^i}{\partial v_B^k} \Big|_{\Phi^{-1}(w)} \frac{\partial(\Phi^{-1})^k_B}{\partial v_C^j} \Big|_w. \quad (\text{A.23})$$

Sea  $\phi: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Por el Teorema 1.51 sabemos que  $FL \circ \phi^{(1)}: U_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^*Q$  es una solución de las ecuaciones de Hamilton-De Donder-Weyl (1.15), esto es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} &= \frac{\partial(FL \circ \phi^{(1)})^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \\ &= \frac{\partial FL^i}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial FL^i}{\partial v_B^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} = \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}}, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} &= - \sum_{A=1}^k \frac{\partial(FL \circ \phi^{(1)})^i_A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \\ &= - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Antes de continuar la demostración, con la finalidad de simplificar las expresiones, introducimos la siguiente notación:

$$\Phi(\mathbf{t}) := (\Phi \circ \phi^{(1)})(\mathbf{t}).$$

En este momento estamos en condiciones de comprobar (a) de (A.14).

[illegible]

A continuación multiplicamos la expresión anterior por la matriz  $\frac{\partial(\Phi^{-1})^i}{\partial v_D^s} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})}$  y así de (A.20) y (A.21) obtenemos

$$\begin{aligned}
0 = & \left\{ - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^k}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_E^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right. \\
& - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^k}{\partial v_B^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial v_B^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_E^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \\
& - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^k}{\partial v_E^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial v_E^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \left( \frac{\partial H}{\partial p_l^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right. \\
& - \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_B^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \Big) \\
& - \left. \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \frac{\partial \Phi^j}{\partial v_E^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right\} \frac{\partial(\Phi^{-1})_E^i}{\partial v_D^s} \Big|_{\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} \\
& + \delta_s^k \delta_D^C \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial H}{\partial p_l^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} - \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_B^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \\
= & \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial v_E^i \partial v_A^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \right. \\
& - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^k}{\partial v_E^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_C^k}{\partial v_E^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \frac{\partial H}{\partial p_l^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \\
& - \left. \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \frac{\partial \Phi^j}{\partial v_E^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right\} \frac{\partial(\Phi^{-1})_E^i}{\partial v_D^s} \Big|_{\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} \\
& + \frac{\partial^2 L}{\partial v_D^s \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial H}{\partial p_l^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} - \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_B^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \\
= & 0 \frac{\partial(\Phi^{-1})_E^i}{\partial v_D^s} \Big|_{\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} \\
& + \frac{\partial^2 L}{\partial v_D^s \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial H}{\partial p_l^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} - \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_B^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \\
= & \frac{\partial^2 L}{\partial v_D^s \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial H}{\partial p_l^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} - \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_B^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \right)
\end{aligned}$$

donde comparando el primer y el último término de la cadena de igualdades ante-

riores obtenemos

$$0 = \frac{\partial^2 L}{\partial v_D^s \partial v_A^l} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial H}{\partial p_l^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} - \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_B^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \right)$$

y puesto que  $L$  es regular, de la identidad anterior deducimos

$$\frac{\partial H}{\partial p_l^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} = \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_B^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}}. \quad (\text{A.26})$$

Por otra parte se tiene la identidad

$$\frac{\partial (FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})^l}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} = \frac{\partial \Phi^l}{\partial q^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^j}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial \Phi^l}{\partial v_B^j} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}}, \quad (\text{A.27})$$

y de (A.26) y (A.27) obtenemos la identidad (a) de las ecuaciones de Hamilton-de Donder-Weyl (A.14). Nos falta probar (b) en (A.14).

A continuación veremos que comprobar (b) es equivalente a probar que se cumple la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} 0 = & \left\{ \sum_{A=1}^k \frac{\partial (FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})^i_A}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} \right. \\ & - \left. \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right) + \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \Big\} \frac{\partial (\Phi^{-1})^l}{\partial q^m} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \\ & + \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

En efecto, consideramos la siguiente cadena de igualdades,

$$\begin{aligned}
\sum_{A=1}^k \frac{\partial(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})_A^i}{\partial t^A} \Big|_t &= \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^k}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial \Phi^j}{\partial v_C^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \\
&+ \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^k}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial v_C^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} \right) \\
&= \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} \\
&+ \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial v_C^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial v_C^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t^A \partial t^B} \Big|_{\mathbf{t}} .
\end{aligned}$$

y multiplicando esta última expresión por  $\frac{\partial \Phi^i}{\partial v_D^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})}$  llegamos a

$$\begin{aligned}
&\sum_{A=1}^k \frac{\partial(FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})_A^i}{\partial t^A} \Big|_t \frac{\partial \Phi^i}{\partial v_D^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \\
&= \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \frac{\partial \Phi^i}{\partial v_D^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} \\
&= \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial v_D^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_D^j}{\partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} \\
&- \frac{\partial^2 L}{\partial v_D^l \partial v_A^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} \\
&= \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial v_D^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial v_D^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} \right. \\
&- \left. \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right) - \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \frac{\partial \Phi^j}{\partial v_D^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} .
\end{aligned}$$

Multiplicando esta última identidad por  $\frac{\partial(\Phi^{-1})_D^l}{\partial q^m} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})}$ , de (A.20) y (A.22) dedu-

cimos

$$\begin{aligned}
& \sum_{A=1}^k \frac{\partial (FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})_A^m}{\partial t^A} \Big|_t - \sum_{A=1}^k \frac{\partial (FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})_A^i}{\partial t^A} \Big|_t \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial (\Phi^{-1})^l}{\partial q^m} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \\
&= \left\{ - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right) + \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right\} \frac{\partial (\Phi^{-1})^l}{\partial q^m} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \\
&+ \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right) - \frac{\partial H}{\partial q^m} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))}
\end{aligned}$$

Finalmente, a partir de la última igualdad se observa que comprobar (b) es equivalente a probar

$$\begin{aligned}
0 &= \left\{ \sum_{A=1}^k \frac{\partial (FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})_A^i}{\partial t^A} \Big|_t \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right. \\
&\quad - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right) + \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \left. \right\} \frac{\partial (\Phi^{-1})^l}{\partial q^m} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \\
&+ \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right)
\end{aligned}$$

Para finalizar demostraremos la igualdad anterior.

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sum_{A=1}^k \frac{\partial (FL \circ \Phi \circ \phi^{(1)})_A^i}{\partial t^A} \Big|_t \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right. \\
&\quad - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} + \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right) + \frac{\partial H}{\partial q^j} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \left. \right\} \frac{\partial (\Phi^{-1})^l}{\partial q^m} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \\
&+ \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial H}{\partial p_k^A} \Big|_{FL(\phi^{(1)}(\mathbf{t}))} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right)
\end{aligned}$$

[illegible]

$$\begin{aligned}
&= \left\{ -\frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t^A \partial t^C} \Big|_{\mathbf{t}} \right. \\
&+ \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial v_C^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial v_C^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t^A \partial t^C} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \\
&- \frac{\partial^2 L}{\partial q^l \partial v_A^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^k}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial \phi^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial^2 L}{\partial q^l \partial v_A^i} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \left. \right\} \frac{\partial(\Phi^{-1})^l}{\partial q^m} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \\
&+ \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^k}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right) \\
&= \left\{ \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial v_C^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial v_C^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right. \\
&- \frac{\partial^2 L}{\partial v_C^k \partial v_A^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \left. \right\} \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t^A \partial t^C} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial(\Phi^{-1})^l}{\partial q^m} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \\
&+ \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^k}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right) \\
&= \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial q^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \frac{\partial \Phi^i}{\partial v_C^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t^A \partial t^C} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial(\Phi^{-1})^l}{\partial q^m} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \\
&+ \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^k}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right) \\
&= - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi^j}{\partial v_D^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 L}{\partial v_B^j \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \frac{\partial \Phi_B^j}{\partial v_D^l} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \right) \frac{\partial \Phi^i}{\partial v_C^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t^A \partial t^C} \Big|_{\mathbf{t}} \frac{\partial(\Phi^{-1})_D^l}{\partial q^m} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \\
&+ \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial v_C^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t^A \partial t^C} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^k}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right) \\
&= \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial v_C^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t^A \partial t^C} \Big|_{\mathbf{t}} + \frac{\partial \Phi^i}{\partial q^k} \Big|_{\phi^{(1)}(\mathbf{t})} \frac{\partial \phi^k}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right) \\
&= \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial v_A^i} \Big|_{\Phi(\mathbf{t})} \left( \frac{\partial(F L \circ \Phi \circ \phi^{(1)})^i}{\partial t^A} \Big|_{\mathbf{t}} - \frac{\partial H}{\partial p_i^A} \Big|_{FL(\Phi(\phi^{(1)}(\mathbf{t})))} \right) = 0
\end{aligned}$$

donde hemos usado que el primer grupo de las ecuaciones de Hamilton-de Donder-Weyl se verifica.

De este modo hemos comprobado que la identidad (b) de (A.14) también se cumple finalizando así esta demostración.  $\square$



## Apéndice B

### Espacios vectoriales $k$ -simpléticos

En este apéndice se recogen algunos resultados relativos a espacios vectoriales  $k$ -simplético y a algunos subespacios de especial interés. La mayor parte de los contenidos de esta sección pueden encontrarse en Awane [7].

Sea  $U$  un espacio vectorial de dimension  $n(k+1)$ ,  $V$  un subespacio de  $U$  de codimensión  $n$  y  $\omega^1, \dots, \omega^k$ ,  $k$  2-formas en  $U$ . Para cada  $A$  ( $A = 1, \dots, k$ ),  $\ker \omega^A$  denota el subespacio asociado a  $\omega^A$  definido por

$$\ker \omega^A = \{u \in U / \omega^A(u, v) = 0 \quad \forall v \in U\}.$$

**Definición B.1**  $(\omega^1, \dots, \omega^k; V)$  es una estructura  $k$ -simplética en  $U$  si

$$\omega^A|_{V \times V} = 0, \quad \bigcap_{A=1}^k \ker \omega^A = 0.$$

Decimos que  $(U, \omega^1, \dots, \omega^k; V)$  es un espacio vectorial  $k$ -simplético.

Sea  $W$  un subespacio lineal de  $U$ . El ortogonal  $k$ -simplético de  $W$  es el subespacio lineal de  $U$  definido por

$$W^\perp = \{u \in U / \omega^A(u, w) = 0 \text{ para todo } w \in W, A = 1, \dots, k\}.$$

**Proposición B.2** El ortogonal  $k$ -simplético verifica

$$(1) \quad A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp.$$

$$(2) \quad W \subset (W^\perp)^\perp.$$

**Observación B.3** A diferencia de lo que ocurre en los espacios vectoriales simpléticos, en nuestro contexto

$$\dim W + \dim W^\perp \neq \dim U.$$

En efecto, consideremos por ejemplo el espacio vectores real  $\mathbb{R}^3$  dotado de la estructura 2-simplética definida por:

$$\omega^1 = e^1 \wedge e^3 \quad \omega^2 = e^2 \wedge e^3 \quad V = \ker e^3$$

donde  $\{e^1, e^2, e^3\}$  es la base dual de la base canónica  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $U = \mathbb{R}^3$ . Consideramos  $W = \text{generan}\{e_3\}$ , el ortogonal 2-simplético de  $W$  es  $W^\perp = \text{span}\{e_3\}$ . En este caso,  $\dim W + \dim W^\perp = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$ .

◇

Generalizando las correspondientes nociones de la geometría simplética vamos a considerar los siguientes tipos especiales de subespacios vectoriales de un espacio vectorial  $k$ -simplético.

**Definición B.4** Sea  $(U, \omega^1, \dots, \omega^k; V)$  un espacio vectorial  $k$ -simplético y  $W$  un subespacio lineal de  $U$ .

- $W$  se dice isotrópico si  $W \subset W^\perp$ .
- $W$  es coisotrópico si  $W^\perp \subset W$ .
- $W$  es lagrangiano si  $W = W^\perp$ .
- $W$  es  $k$ -simplética si  $W \cap W^\perp = 0$ .

**Proposición B.5** Para cada subespacio vectorial  $W$  de  $U$  las siguientes propiedades son equivalentes:

- (1)  $W$  es un subespacio isotrópico.

(2)  $\omega^A(u, v) = 0$  ( $A = 1, \dots, k$ ) para todo  $u, v \in W$ .

*Demostración:*

Supongamos que  $W$  es isotrópico, esto es  $W \subset W^\perp$ .

Entonces si  $u, v \in W$  se verifica  $\omega^A(u, v) = 0$  puesto que  $u \in W^\perp$ .

Recíprocamente, para cada par de elementos  $u, v \in W$  se verifica (por hipótesis)  $\omega^A(u, v) = 0$  ( $A = 1, \dots, k$ ). Entonces fijado  $u \in W$  se tiene que

$$\omega^A(u, v) = 0 \quad (A = 1, \dots, k) \text{ para cada } v \in W,$$

esto es,  $u \in W^\perp$ . Por lo tanto obtenemos que  $W \subset W^\perp$ , es decir,  $W$  es isotrópico.

□

Además de los contenidos que aparecen recogidos en Awane [7], demostraremos, en esta memoria, el siguiente resultado que nos permite establecer una caracterización de los subespacios vectoriales  $k$ -simpléticos.

**Proposición B.6** *Sea  $(U, \omega^1, \dots, \omega^k; V)$  un espacio vectorial  $k$ -simplético y  $W$  un subespacio lineal de  $U$ .  $W$  es un subespacio  $k$ -simplético si, y sólo si,  $W$  con la restricción de la estructura  $k$ -simplética de  $U$  a  $W$  es un espacio vectorial  $k$ -simplético.*

*Demostración:*

Supongamos que  $W$  es un subespacio  $k$ -simplético de  $(U, \omega^1, \dots, \omega^k; V)$ , esto es,  $W \cap W^\perp = \{0\}$ .

Consideremos la restricción  $\omega_W^A$  a  $W$  de las 2-formas  $\omega^A$ , a continuación probaremos que  $(W, \omega_W^1, \dots, \omega_W^k, V \cap W)$  es un espacio vectorial  $k$ -simplético.

Dado  $u, v \in V \cap W$  se obtiene

$$\omega_W^A(u, v) = \omega^A|_{V \times V}(u, v) = 0, \quad (A = 1, \dots, k).$$

Por otro lado, si  $u \in \cap \ker \omega_W^A$  entonces  $\omega^A(u, v) = 0$ , ( $A = 1, \dots, k$ ) para todo  $v \in W$ , entonces  $u \in W^\perp$ . Así, puesto que  $u \in W \cap W^\perp = \{0\}$  deducimos  $\cap \ker \omega_W^A = \{0\}$ .

Recíprocamente, supongamos ahora que  $(W, \omega_W^1, \dots, \omega_W^k, V \cap W)$  es un espacio vectorial  $k$ -simplético y probemos que  $W \cap W^\perp = \{0\}$ .

Si  $u \in W \cap W^\perp$  entonces  $u \in W^\perp$ , esto es  $\omega^A(u, v) = 0$  ( $A = 1, \dots, k$ ) para todo  $v \in W$ . Puesto que  $u \in W$  se obtiene que  $u \in \cap \ker \omega_W^A = \{0\}$  y por tanto  $u = 0$ .

□

Observemos que si  $(M, \omega^1, \dots, \omega^k, V)$  es una variedad  $k$ -simplética, entonces para cada  $x \in M$ , se tiene que  $(\omega_x^1, \dots, \omega_x^k, V_x)$  es una estructura  $k$ -simplética en el espacio vectorial  $T_x M$ .

# Apéndice C

## Índice de símbolos

En este apéndice se recoge la notación que hemos ido empleando a lo largo de la memoria.

$\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$	Fibrado cotangente.
$\pi_Q^k : (T_k^1)^*Q \rightarrow Q$	Fibrado de $k^1$ -covelocidades.
$(q^i)_{i=1,\dots,n}$	Coordenadas en $Q$ .
$(q^i, p_i)_{i=1,\dots,n}$	Coordenadas en $T^*Q$ .
$(q^i, p_i^A)_{i=1,\dots,n; A=1,\dots,k}$	Coordenadas en $(T_k^1)^*Q$ .
$\hat{\pi}^A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$	Proyección A-ésima.
$\pi_Q^{k,A} : (T_k^1)^*Q \rightarrow T^*Q$	
$\theta \in \Omega^1(T^*Q)$	1-forma de Liouville en $T^*Q$ .
$\omega \in \Omega^2(T^*Q)$	Forma simpléctica canónica en $T^*Q$ .
$\theta^A \in \Omega^1((T_k^1)^*Q); 1 \leq A \leq k$	1-formas canónicas en $(T_k^1)^*Q$ .
$\omega^A \in \Omega^2((T_k^1)^*Q); 1 \leq A \leq k$	2-formas canónicas en $(T_k^1)^*Q$ .
$T^*f : T^*N \rightarrow T^*M$	Aplicación cotangente inducida por una aplicación $f : M \rightarrow N$ .
$(T_k^1)^*f : (T_k^1)^*N \rightarrow (T_k^1)^*M$	Levantamiento canónico de $f : M \rightarrow N$ a los fibrados de $k^1$ -covelocidades.
$Z^{C*}$	Levantamiento completo de $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ a $(T_k^1)^*Q$ .

$\tau_Q : TQ \rightarrow Q$	Fibrado tangente.
$\tau_Q^k : T_k^1 Q \rightarrow Q$	Fibrado tangente de $k^1$ -velocidades.
$\tau_Q^{k,A} : T_k^1 Q \rightarrow TQ$	
$\phi^{(1)} : \mathbb{R}^k \rightarrow T_k^1 Q$	Primera prolongación de $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow Q$ a $T_k^1 Q$ .
$\mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^k, (T_k^1)^* Q)$	Aplicaciones $\mathbb{R}^k \rightarrow (T_k^1)^* Q$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ con soporte compacto.
$H : M \rightarrow \mathbb{R}$	Función hamiltoniana.
$\mathcal{H} : \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^k, (T_k^1)^* Q) \rightarrow \mathbb{R}$	Acción hamiltoniana $k$ -simpléctica.
$d^k \mathbf{t}$	Forma de volumen en $\mathbb{R}^k$ .
$d^{k-1} \mathbf{t}^A = \iota_{\frac{\partial}{\partial t^A}} d^k \mathbf{t}$	
$\mathfrak{X}_H^k(M)$	Campos de $k$ -vectores hamiltonianos en $M$ .
$(q^i, v_A^i)_{i=1, \dots, n; A=1, \dots, k}$	Coordenadas en $T_k^1 Q$ .
$X^{V_A}$	Levantamiento vertical $A$ -ésimo de campos de vectores de $Q$ a $T_k^1 Q$ .
$\{J^1, \dots, J^k\}$	Estructura $k$ -tangente canónica en $T_k^1 Q$ .
$\Delta$	Campo de Liouville en $T_k^1 Q$ .
$\Delta_1, \dots, \Delta_k$	Campos de vectores canónicos en $T_k^1 Q$ .
$T_k^1 f : T_k^1 M \rightarrow T_k^1 N$	Levantamiento canónico de $f : M \rightarrow N$ a los fibrados de $k^1$ -velocidades.
$Z^C$	Levantamiento completo de campos de vectores de $Q$ a $T_k^1 Q$ .
$L : M \rightarrow \mathbb{R}$	Función lagrangiana definida en $M$ .
$\theta_L^A, \omega_L^A$	Formas lagrangianas.
$FL : T_k^1 Q \rightarrow (T_k^1)^* Q$	Transformación de Legendre $k$ -simpléctica.
$\mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^k, Q)$	Aplicaciones $\mathbb{R}^k \rightarrow Q$ con soporte compacto.
$\mathcal{J} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k, Q) \rightarrow \mathbb{R}$	Acción lagrangiana $k$ -simpléctica.
$E_L$	Función energía lagrangiana.
$\mathfrak{X}_L^k(T_k^1 Q)$	Conjunto de campos de $k$ -vectores lagrangianos.
$d_T g : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$	Operador de Tulczjew actuando sobre una aplicación $g : Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ .
$\hat{\alpha} : T_k^1 Q \rightarrow \mathbb{R}$	Función asociada a las 1-formas $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ .

$\mathcal{M} \subset T_k^1 Q$	Subvariedad de ligaduras.
$F$	Fibrado de las formas de ligadura.
$\mathcal{S} = \langle Z_1, \dots, Z_k \rangle$	Distribución de ligaduras.
$T_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q)$	Restricción a $\mathcal{M}$ de $T(T_k^1 Q)$ .
$P: T_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q) \rightarrow T\mathcal{M}$	Proyector no-holonómico.
$Q: T_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q) \rightarrow \mathcal{S}$	Operador complementario a $P$ .
$(T_k^1)_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q)$	Restricción a $\mathcal{M}$ de $T_k^1(T_k^1 Q)$ .
$\mathcal{P}: (T_k^1)_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 \mathcal{M}$	Operador proyección.
$\mathcal{Q}: (T_k^1)_{\mathcal{M}}(T_k^1 Q) \rightarrow \mathfrak{S}$	Operador complementario a $\mathcal{P}$ .
$\mathfrak{g}$	Álgebra de Lie de un grupo de Lie $G$ .
$\xi_Q$	Campo de vectores fundamental asociado a $\xi \in \mathfrak{g}$ .
$(J^{nh})^A: \mathcal{M} \rightarrow (Sec(\mathfrak{g}^F))^*$	Componente $A$ -ésima de la aplicación momento no-holonómica.
$D^0$	Anulador de la distribución $D$ .
$W^\perp$	Ortogonal $k$ -simpléctico del subespacio $W$ de un espacio vectorial $k$ -simpléctico.
$0 \rightarrow T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q \xrightarrow{i} T(T_k^1 Q) \xrightarrow{j} T_k^1 Q \times_Q TQ \rightarrow 0$	Sucesión exacta construida a partir de $\tau_Q^k$ .
$\mathcal{H}: T_k^1 Q \times_Q TQ \rightarrow T(T_k^1 Q)$	Aplicación horizontal.
$\mathcal{V}: T(T_k^1 Q) \rightarrow T_k^1 Q \times_Q T_k^1 Q$	Retracción asociada a $\mathcal{H}$ .
$\mathbf{h}: T(T_k^1 Q) \rightarrow H(T_k^1 Q)$	Proyector horizontal.
$\mathbf{v}: T(T_k^1 Q) \rightarrow V(T_k^1 Q)$	Proyector vertical.
$LQ$	Fibrado de las referencias lineales sobre $Q$ .
$(E, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_E, \rho)$	Algebroides de Lie.
$\tau: E \rightarrow Q$	Proyección asociada al algebroides $E$ .
$Sec(E)$	Conjunto de secciones de $\tau$ .
$\rho: E \rightarrow TQ$	Ancla del algebroides $E$ .
$\rho: Sec(E) \rightarrow \mathfrak{X}(Q)$	Ancla del algebroides $E$ .
$\rho_\alpha^i, \mathbb{C}_{\beta\gamma}^\alpha$	Funciones de estructura.
$\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_E: Sec(E) \times Sec(E) \rightarrow Sec(E)$	Corchete de Lie en $E$

$\tau^* : E^* \rightarrow Q$	fibrado dual de $E$
$d^E : Sec(\bigwedge^l E^*) \rightarrow Sec(\bigwedge^{l+1} E^*)$	Diferencial exterior en $E$
$\pi : P \rightarrow Q$	Fibrado vectorial
$T\pi : TP \rightarrow TQ$	Aplicación tangente asociada a $\pi : P \rightarrow Q$
$\mathcal{T}^E P = E \times_{TQ} TP$	Prolongación del algebroid de Lie $E$ mediante $\pi : P \rightarrow Q$
$\tilde{\tau}_P : \mathcal{T}^E P \rightarrow P$	Fibrado prolongación del algebroid de Lie $E$ sobre $\pi$
$\tilde{\tau}_1 : \mathcal{T}^E P \rightarrow E$	Proyección sobre el primer factor
$\rho^\pi : \mathcal{T}^E P \rightarrow TP$	Aplicación ancla del algebroid prolongación
$(\rho^\pi, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket^\pi)$	Estructura de algebroid de Lie en $\mathcal{T}^E P$ .
$\bigoplus^k E$	Suma de Whitney de $k$ copias del algebroid
$\tilde{\tau} : \bigoplus^k E \rightarrow Q$	
$(q^i, y^\alpha)$	Sistema local de coordenadas en $E$
$(q^i, y_A^\alpha)$	Sistema local de coordenadas en $\bigoplus^k E$
$\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$	Base local de $Sec(E)$
$(q^i, u^\ell)$	Sistema local de coordenadas en $P$ .
$(q^i, u^\ell, z^\alpha, w^\ell)$	Sistema local de coordenadas en $\mathcal{T}^E P$ .
$\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\ell\}$	Base local de secciones de $\tilde{\tau}_P : \mathcal{T}^E P \rightarrow P$
$\{\mathcal{X}^\alpha, \mathcal{V}^\ell\}$	Base dual de $\{\mathcal{X}_\alpha^A, (\mathcal{V}^A)_\ell\}$
$\tilde{J}^1, \dots, \tilde{J}^k$	Endomorfismos verticales en $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$ .
$\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_k$	Secciones de Liouville en $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E)$ .
$\Theta_L^A, \Omega_L^A$	Secciones de Poincaré-Cartan.
$\Phi = (\overline{\Phi}, \underline{\Phi})$	Morfismo de algebroides de Lie.
$\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^k \rightarrow \bigoplus^k E$	Aplicación asociada al morfismo de algebroides de Lie.
$\bigoplus^k E^*$	Suma de $k$ -copias de $E^*$ .
$\Theta^A, \Omega^A$	Secciones de Liouville en $\mathcal{T}^E(\bigoplus^k E^*)$ .
$\mathcal{L}eg : \bigoplus^k E \rightarrow \bigoplus^k E^*$	Transformación de Legendre



$\hat{\pi}_Q : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow Q$	
$(\hat{\pi}_Q)_{1,0} : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$	
$(\hat{\pi}_Q)_1 : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow Q$	
$\hat{\pi}_1^A : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow \mathbb{R}$	Proyección sobre la $A$ -ésima copia del primer factor.
$\hat{\pi}_2^A : \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q \rightarrow T^*Q$	Proyección sobre la $A$ -ésima copia del segundo factor.
$(t^A, q^i, p_i^A)_{A=1,\dots,k; i=1,\dots,n}$	Coordenadas en $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ .
$\{R_1, \dots, R_k\}_{A=1,\dots,k}$	Campos de Reeb.
$Z^{1*}$	Levantamiento completo de campos de vectores de $\mathbb{R}^k \times Q$ a $\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$ .
$Sec(M, N)$	Espacio de secciones de $N \rightarrow M$ .
$Sec_C(M, N)$	Espacio de secciones de $N \rightarrow M$ con soporte compacto.
$\mathbb{H} : Sec_C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q) \rightarrow \mathbb{R}$	Acción hamiltoniana.
$\Theta_0 \in \Omega^k(\mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q)$	
$(t^A, q^i, v_A^i)_{A=1,\dots,k; i=1,\dots,n}$	Coordenadas en $\mathbb{R}^k \times T_k^1Q$ .
$\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$	
$(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_{1,0} : \mathbb{R}^k \times T_k^1Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$	
$(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})_1 : \mathbb{R}^k \times T_k^1Q \rightarrow \mathbb{R}^k$	
$p_Q : \mathbb{R}^k \times T_k^1Q \rightarrow Q$	
$\Delta$	Campo de Liouville en $\mathbb{R}^k \times T_k^1Q$ .
$\Delta_1, \dots, \Delta_k$	Campos de vectores canónicos en $\mathbb{R}^k \times T_k^1Q$ .
$\{S^1, \dots, S^k\}$	Campos de tensores canónicos en $\mathbb{R}^k \times T_k^1Q$ .
$\{\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^k\}$	Campos de tensores en $\mathbb{R}^k \times T_k^1Q$ .
$FL : \mathbb{R}^k \times T_k^1Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times (T_k^1)^*Q$	Aplicación de Legendre $k$ -cosimpléctica.
$\phi^{[1]} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1Q$	Primera prolongación de $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow Q$ a $\mathbb{R}^k \times T_k^1Q$ .
$j^1f : \mathbb{R}^k \times T_k^1Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times T_k^1Q$	Levantamiento natural de $f : \mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k \times Q$ a $\mathbb{R}^k \times T_k^1Q$ .
$Z^1$	Levantamiento natural de campos de vectores de $\mathbb{R}^k \times Q$ a $\mathbb{R}^k \times T_k^1Q$ .
$\mathbb{S} : Sec_c(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \times Q) \rightarrow \mathbb{R}$	Acción integral lagrangiana.

$\nabla$	Conexión en $\mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ .
$h: T(\mathbb{R}^k \times Q) \rightarrow H(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$	Proyector horizontal asociado a $\nabla$ .
$v: T(\mathbb{R}^k \times Q) \rightarrow V(\hat{\pi}_{\mathbb{R}^k})$	Proyector vertical asociado a $\nabla$ .
$\mathcal{R}_{\nabla}$	Curvatura de $\nabla$ .
$X^H$	Levantamiento horizontal de campos de vectores.
$\tilde{\Theta}_L^A$	1-formas de Poincaré-Cartan en $\mathbb{R}^k \times T_k^1 Q$ .
$E_L^{\nabla}$	Energía asociada a la conexión $\nabla$ y al lagrangiano $L$ .
$\theta_{\nabla}^A, \omega_{\nabla}^A,$	Formas hamiltonianas asociadas a $\nabla$ .
$H^{\nabla}$	hamiltoniano asociado a $\nabla$ .
$(\theta_L)_\nabla^A, (\omega_L)_\nabla^A,$	Formas lagrangianas asociadas a $\nabla$ .
$\tilde{p}: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow Q$	Proyección canónica
$\tilde{S}^1, \dots, \tilde{S}^k$	Endomorfismos verticales en $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .
$\hat{\Delta}_1, \dots, \hat{\Delta}_k$	Secciones de Liouville en $\mathcal{T}^E(\mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E)$ .
$\tilde{p}^*: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^* \rightarrow Q$	Proyección canónica
$Leg: \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E \rightarrow \mathbb{R}^k \times \bigoplus^k E^*$	Transformación de Legendre.

# Conclusiones.

El punto de partida de esta memoria ha sido la formulación  $k$ -simplética y  $k$ -cosimplética de las Teorías Clásicas de Campo de Primer Orden, cuyo origen se encuentra en diversos trabajos de M. de León [80, 82, 81, 83, 84].

A lo largo de la memoria hemos estudiado diversos temas relacionados con las teorías de campos en los formalismos antes mencionados y se ha comprobado que los diversos resultados que se han establecido generalizan los correspondientes resultados de la Mecánica Clásica lagrangiana y hamiltoniana, autónoma y dependiente del tiempo.

Entre los resultados a los que he llegado a lo largo del trabajo realizado quiero destacar los siguientes:

- La teoría de simetrías y leyes de conservación que se ha desarrollado en el Capítulo 2 nos ha permitido extender el teorema de Noether de la Mecánica Clásica al contexto  $k$ -simplético de modo que nos permite asociar leyes de conservación o cantidades conservadas a ciertos tipos de simetrías, tanto en el enfoque hamiltoniano como en el lagrangiano.

Pretendo continuar este estudio extendiendo los resultados sobre simetrías de la Mecánica dependiente del tiempo al contexto  $k$ -cosimplético.

- En el Capítulo 3 se han estudiado diversos aspectos de las teorías clásicas de campos sujetos a ligaduras no-holonómicas en el entorno  $k$ -simplético. El estudio que hemos realizado es muy similar al caso de la mecánica de partículas. Al mismo tiempo los resultados que se han obtenidos son similares a los del contexto multisimplético, pero con la ventaja de que el enfoque  $k$ -simplético es más simple en su descripción y forma de trabajo. En este capítulo también se muestra que, bajo ciertas condiciones de regularidad la proyección de soluciones del sistema sin ligaduras proporciona soluciones del problema con ligaduras no-holonómicas.

Además en este capítulo se analiza el caso particular de una subvariedad de ligaduras  $\mathcal{M}$  que se obtiene como la suma de  $k$  copias de una distribución sobre el espacio de configuración. En este caso particular se ha construido una distribución  $\mathcal{D}$  en  $T_k^1 Q$  a lo largo de  $\mathcal{M}$  que, en cada punto, es un subespacio  $k$ -simplético del espacio vectorial  $k$ -simplético  $(T(T_k^1 Q), \omega_L^1, \dots, \omega_L^k, V)$  asociado a un lagrangiano regular  $L$ . Este hecho permite extender al contexto  $k$ -simplético el procedimiento de Bates y Sniatycki [8] para el caso lineal.

- Se ha asociado a cada conexión no lineal en el fibrado  $T_k^1 Q$  un SOPDE y recíprocamente a cada SOPDE se le asocia una conexión no lineal en el fibrado antes mencionado.
- En el contexto  $k$ -cosimplético también se han estudiado conexiones no lineales, en este caso en el fibrado trivial  $\mathbb{R}^k \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$  y se ha demostrado que asociada a cada conexión  $\nabla$  en dicho fibrado y a cada función lagrangiana  $L$  se define una función  $E_L^\nabla$ , llamada función energía que permite demostrar que existe una correspondencia biyectiva entre las soluciones de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange y las ecuaciones de campo de Hamilton-De Donder-Weyl.
- Se ha desarrollado una formulación  $k$ -simplética y  $k$ -cosimplética en algebroides de Lie. La idea de esta formulación ha sido sustituir el fibrado tangente de la variedad de configuración por un algebroide de Lie arbitrario. De este modo obtenemos una nueva teoría que generaliza por una parte la formulación  $k$ -simplética y  $k$ -cosimplética estándar y por otra la Mecánica en algebroides de Lie.
- En relación con el último punto comentado pretendo desenvolver la formulación  $k$ -simplética y  $k$ -cosimplética de la teoría de campos discretos sobre grupoides de Lie. Para eso, los pasos a seguir serían los siguientes. En primer lugar desarrollar la formulación  $k$ -simplética y  $k$ -cosimplética discretas, estudiando sus propiedades y elementos geométricos. En segundo lugar extender estos resultados al estudio de campos discretos sobre grupoides de Lie.

# Bibliografía

- [1] R. ABRAHAM-J. E. MARSDEN: *Foundations of Mechanics*, Benjamin, Nueva York, 1978.
- [2] S. S. ANTMAN, *Nonlinear Problems of Elasticity*, Applied Mathematical Sciences, vol. 107, Springer-Verlag, 2005.
- [3] V.I. ARNOLD, *Mathematical methods of classical mechanics*. Graduate Texts in Mathematics **60**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1978).
- [4] V.I. ARNOLD, *Dynamical Systems*, Vol. III, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, (1998).
- [5] A. AWANE, *k-symplectic structures*, *J. Math. Phys.* **33** (1992) 4046-4052.
- [6] A. AWANE, *G-spaces k-symplectic homogènes*, *J. Geom. Phys.* **13** (1994) 139-157.
- [7] A. AWANE, M. GOZE, *Pfaffian systems, k-symplectic systems*, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht (2000).
- [8] L. BATES AND J. SNIATYCKI, *Nonholonomic reduction*, *Rep. Math. Phys.* 32 (1993), no. 1, 99-115.
- [9] E. BINZ, M. DE LEÓN, D. MARTÍN DE DIEGO, AND D. SOCOLESCU, *Nonholonomic Constraints in Classical Field Theories*, *Rep. Math. Phys.* 49 (2002), 151-166.
- [10] A.M. BLOCH, *Nonholonomic Mechanics and Control*, Interdisciplinary Applied Mathematics Series **24**, Springer-Verlag New-York, 2003.
- [11] A. M. BLOCH, P. S. KRISHNAPRASAD, J. E. MARSDEN, R. M. MURRAY, *Nonholonomic Mechanical Systems with Symmetry*, *Arch. Rat. Mech. Phys.* **136** (1) (1996), 21-99.

- [12] I. BUCATARU, *Linear connections for systems of higher order differential equations*, *Houston J. Math.* **31**(2) (2005) 315–332 .
- [13] A. CANNAS DA SILVA, A. WEINSTEIN, *Geometric models for noncommutative algebras*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999; xiv+184 pp.
- [14] F. CANTRIJN, A. IBORT, M. DE LEÓN, *Hamiltonian structures on multisymplectic manifolds*, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, **54** (1996), 225–236.
- [15] F. CANTRIJN, A. IBORT, M. DE LEÓN, *On the geometry of multisymplectic manifolds*, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **66** (1999), 303–330.
- [16] J. F. CARIÑENA, M. CRAMPIN, L.A. IBORT, *On the multisymplectic formalism for first order field theories*, *J. Geom. Phys.***3** (1986), 353–400.
- [17] J.F. CARIÑENA, C. LÓPEZ, E. MARTÍNEZ, *A new approach to the converse of Noether's theorem*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**(22) (1989) 4777–4786.
- [18] M. CASTRILLÓN LÓPEZ, P. L. GARCÍA PÉREZ, T. S. RATIU, *Euler-Poincaré reduction on principal bundles*, *Seat. Math. Phys.* 58 (2001), no. 2, 167–180.
- [19] M. CASTRILLÓN LÓPEZ, T. S. RATIU, *Reduction in principal bundles: covariant Lagrange-Poincaré equations*, *Comm. Math. Phys.* 236 (2003), no. 2, 223–250.
- [20] M. CASTRILLÓN LÓPEZ, J.E. MARSDEN, *Covariant and dynamical reduction for principal bundle field theories*, *Ann Dlob Anal Geom* (2008), 34, 263–285.
- [21] H. CENDRA, J. E. MARSDEN, T.S. RATIU: *Lagrangian reduction by stages*, *Mem. Amer. Soc.* **152** (722) 2001.
- [22] J. CORTÉS, *Geometric, control and numerical aspects of nonholonomic systems*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1793, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [23] J. CORTÉS, M. DE LEÓN, D. MARTÍN DE DIEGO, S. MARTÍNEZ, *Geometric description of vakonomic and nonholonomic dynamics. Comparison of soluciones*, *SIAM J. Control Optim.* **41** (2002) 1389–1412.
- [24] J. CORTÉS, M. DE LEÓN, J.C. MARRERO, D. MARTÍN DE DIEGO, E. MARTINEZ, *A survey of. Lagrangian mechanics and control on Lie algebroids and groupoids*. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 3 (2006), no. 3, 509–558.

- [25] J. CORTÉS, S. MARTÍNEZ, F. CANTRIJN, *Skinner-Rusk approach to time-dependent mechanics*, *Phys. Scripta A* **300** (2002) 250-258.
- [26] M. CRAMPIN, *On horizontal distributions on the tangent bundle of a differentiable manifold*, *J. London Math. Soc. (2)* **3** (1971) 178-182.
- [27] M. CRAMPIN, *Defining Euler-Lagrange fields in terms of almost tangent structures*, *Phys. Lett. A* **95** (1983) 466-468.
- [28] M. CRAMPIN, *Generalized Bianchi identities for horizontal distributions*, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **94** (1983) 125-132.
- [29] M. CRAMPIN, *Connections of Berwald type*, *Publ. Math. Debrecen* **57** (2000) 455-473.
- [30] M. CRAMPIN, *Tangent bundle geometry for Lagrangian dynamics*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** (1983), 3755-3772.
- [31] E. DURAND : *Électrostatique, les distributions*, Mason et Cie Editeurs, Paris 1964.
- [32] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, C. LÓPEZ, J. MARÍN-SOLANO, M.C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, *Lagrangian-Hamiltonian unified formalism for field theory*. *J. Math. Phys.* **45**(1) (2004) 360-380.
- [33] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M.C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, *Multivector Field Formulation of Hamiltonian Field Theories: Equations and Symmetries*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**(48) (1999) 8461-8484.
- [34] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M.C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, *Non-standard connections in classical mechanics*. *J. Phys. A: Math. Gen.* **28**(19) (1995) 5553-5567.
- [35] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M.C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, *Geometry of Lagrangian first-order classical field theories*. *Fortsch. Phys.* **44**(3) (1996) 235-280.
- [36] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M.C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, *Geometry of Multisymplectic Hamiltonian First-order Field Theories*. *J. Math. Phys.* **41**(11) (2000) 7402-7444.
- [37] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M.C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, *Geometrical setting of time-dependent regular systems: Alternative models*. *Rev. Math. Phys.* **3**(3) (1991) 301-330.

- [38] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M.C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY: *Multivector fields and connections: Setting Lagrangian equations in field theories*, *J. Math. Phys.* **39** (1998) 4578-4603.
- [39] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M.C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY: *Multivector fields formulation of Hamiltonian field theories: equations and symmetries*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) 8461-8484.
- [40] P.L. GARCÍA, A. PÉREZ-RENDÓN, *Symplectic approach to the theory of quantized fields, I*, *Comm. Math. Phys.* **13** (1969) 24-44.
- [41] P.L. GARCÍA, A. PÉREZ-RENDÓN, *Symplectic approach to the theory of quantized fields, II*, *Arch. Ratio. Mech. Anal.* **43** (1971), 101-124.
- [42] G. GIACHETTA, L. MANGIAROTTI, G. SARDANASHVILY, *Covariant Hamilton equations for field theory*, *J. Phys. A* **32** (1999), 6629-6642.
- [43] G. GIACHETTA, L. MANGIAROTTI, G. SARDANASHVILY, *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory*, World Scientific Pub. Co., Singapore (1997).
- [44] C. GODBILLON, *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*, Hermann, Paris, 1969.
- [45] H. GOLDSCHMIDT-S. STERNBERG, *The Hamilton-Cartan Formalism in the Calculus of Variations*, *Ann. Inst. Fourier*, **23**,1 (1973), 203-267.
- [46] M.J. GOTAY, *An exterior differential systems approach to the Cartan form*. In: *Symplectic geometry and mathematical physics (Aix-en-Provence, 1990)*. *Progr. Math.*, 99, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991, pp. 160-188.
- [47] M.J. GOTAY, *A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations, I. Covariant Hamiltonian formalism*. In: *Mechanics, analysis and geometry: 200 years after Lagrange*. North-Holland Delta Ser., North-Holland, Amsterdam, 1991, pp. 203-235.
- [48] M.J. GOTAY, *A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations, II. Space + time decomposition*. *Differential Geom. App.* **1** (1991), 375-390.
- [49] M. GOTAY, J. ISENBERG, J. E. MARSDEN, *Momentum Maps and Classical Relativistic Fields, Part I: Covariant Field Theory*, arXiv:physics/9801019v2 (2004). *Part II: Canonical analysis of Field Theories*, arXiv:math-ph/0411032v1 (2004).



- [50] M.J. GOTAY, J. ISENBERG, J.E. MARSDEN, R. MONTGOMERY, *Momentum maps and classical relativistic fields I: Covariant Theory*, arXiv:physics/9801019v2 (1999).
- [51] M. GOTAY, J. ISENBERG, J. E. MARSDEN [\*1997] *Momentum Maps and Classical Relativistic Fields, Part I: Covariant Field Theory* (66 pages) (pdf). See also: [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org): [2004] physics/9801019
- [52] M. GOTAY, J. ISENBERG, J. E. MARSDEN [\*1999] *Momentum Maps and Classical Relativistic Fields, Part II: Canonical analysis of Field Theories* (70 pages). See also [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org): [2004] math-ph/0411032
- [53] J. GRIFONE, *Structure presque-tangente et connexions, I*, Ann. Inst. Fourier **22**(1) (1972) 287–334.
- [54] J. GRIFONE, *Structure presque-tangente et connexions, II* Ann. Inst. Fourier **22**(3) (1972) 291–338.
- [55] J. GRIFONE, M. MEHDI, *On the geometry of Lagrangian mechanics with non-holonomic constraints*, J. Geom. Phys. **30**(3) (1999) 187–203.
- [56] C. GÜNTHER: *The Polysymplectic Hamiltonian Formalism in Field Theory and Calculus of Variations I: The Local Case*, J. Differential Geometry, **25** (1987) 23–53.
- [57] P.J. HIGGINS, K. MACKENZIE, *Algebraic constructions in the category of Lie algebroids*, J. of Algebra **129** (1990) 194–230.
- [58] N. IKEDA, *Two dimensional gravity and nonlinear gauge theory*, Ann. Phys., **235**. (1994) 435–464.
- [59] I. V. KANATCHIKOV: *Canonical structure of classical field theory in the polymomentum phase space*, Rep. Math. Phys. **41**(1) (1998) 49–90.
- [60] J. KIJOWSKI, *A finite-dimensional canonical formalism in the classical field theory*, Comm. Math. Phys. **30** (1973), 99–128.
- [61] J. KIJOWSKI, W. SZCZYRBA, *Multisymplectic manifolds and the geometrical construction of the Poisson brackets in the classical field theory*, Géométrie symplectique et physique mathématique (Colloq. International C.N.R.S., Aix-en-Provence, 1974) (1974) 347–349.

- [62] J. KIJOWSKI, W. M. TULCZYJEW, *A symplectic framework for field theories*. Lecture Notes in Physics, , 107. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.
- [63] J. KLEIN, *Espaces variationelles et mécanique*. Ann. Inst. Fourier **12** (1962), 1-124.
- [64] I. KOLÁŘ, P. MICHOR, J. SLOVÁK: *Natural operations in Differential Geometry*, Springer-Verlag, 1993.
- [65] M. DE LEÓN, E. A. LACOMBA, *Lagrangian submanifolds and higher-order mechanical systems*. J. Phys. A **22** (1989), no. 18, 3809–3820
- [66] M. DE LEÓN, E.A. LACOMBA, P.R. RODRIGUES, *Special presymplectic manifolds, Lagrangian submanifolds and the Lagrangian-Hamiltonian systems on jet bundles*. Proceedings of the First "Dr. Antonio A. R. Monteiro" Congress on Mathematics (Spanish) (Bahía Blanca, 1991), 103–122, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1991.
- [67] M. DE LEÓN, J. MARÍN, J. C. MARRERO: *Ehresmann Connections in Classical Field Theories*, Análes de Física, Monografías 2. WODGDA'94.
- [68] M. DE LEÓN, J. MARÍN, J. C. MARRERO: *A Geometrical Approach to Classical Field Theories: A Constraint Algorithm for singular Theories*, Proceedings Colloquium on Differential Geometry, Debrecen (Hungary), 1994.
- [69] M. DE LEÓN, J.C. MARRERO, D. MARTÍN DE DIEGO. *Mechanical systems with non-linear constraints*. Internat. J. Theoret. Phys. **36** (4) (1997), 973–989.
- [70] M. DE LEÓN, J.C. MARRERO, D. MARTÍN DE DIEGO. *Non-holonomic Lagrangian systems in jet manifolds*. J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997), 1167-1190.
- [71] M. DE LEÓN, J.C. MARRERO, D. MARTÍN DE DIEGO, *A new geometrical setting for classical field theories*, Classical and Muantum Integrability. Banach Center Pub. **59**, Inst. of Math., Polish Acad. Sci., Warsawa (2002) 189-209.
- [72] M. DE LEÓN M, J.C. MARRERO, E. MARTÍNEZ, *Lagrangian submanifolds and dynamics on Lie algebroids*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), R241-R308.
- [73] M. DE LEÓN, D. MARTÍN DE DIEGO, *On the geometry of non-holonomic Lagrangian systems*. J. Math. Phys. **37** (1996), 3389–3414.
- [74] M. DE LEÓN, D. MARTÍN DE DIEGO, *Symmetries and Constant of the Motion for Singular Lagrangian Systems*, Int. J. Theor. Phys. **35**(5) (1996) 975-1011.

- [75] M. DE LEÓN, D. MARTÍN DE DIEGO, A. SANTAMARÍA-MERINO, *Symmetries in classical field theories*, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **1**(5) (2004) 651-710.
- [76] M. DE LEÓN, D. MARTÍN DE DIEGO, A. SANTAMARÍA, *Tulczyjew triples and lagrangian submanifolds in classical field theories*. *Applied Differential Geometry and Mechanics* (2003), 21-47.
- [77] M. DE LEÓN, D. MARTÍN DE DIEGO, A. SANTAMARÍA-MERINO, *Geometric integrators and nonholonomic mechanics* *J. Math. Phys.* **45** (2004), no. 3, 1042–1064.
- [78] M. DE LEÓN, D. MARTÍN DE DIEGO, M. SALGADO, S. VILARIÑO, *Nonholonomic constraints in  $k$ -symplectic Classical Field Theories*. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **5**, no. 5 (2008), 799-830.
- [79] M. DE LEÓN, M. MCLEAN, L.K. NORRIS, A. REY-ROCA, M. SALGADO, *Geometric Structures in Field Theory*, arXiv:math-ph/0208036v1 (2002).
- [80] M. DE LEÓN, I. MÉNDEZ, M. SALGADO,  *$p$ -almost tangent structures*, *Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II* **XXXVII** (1988), 282-294.
- [81] M. DE LEÓN, I. MÉNDEZ, M. SALGADO: *Regular  $p$ -almost cotangent structures*, *J. Korean Math. Soc.* **25** n 2 (1988), 273-287.
- [82] M. DE LEÓN, I. MÉNDEZ, M. SALGADO: *Integrable  $p$ -almost tangent structures and tangent bundles of  $p^1$ -velocities*, *Acta Math. Hungar.* **58**(1-2) (1991), 45-54.
- [83] M. DE LEÓN, E. MERINO, J.A. OUBIÑA, P.R. RODRIGUES, M. SALGADO, *Hamiltonian systems on  $k$ -cosymplectic manifolds*, *J. Math. Phys.* **39** (2) (1998), 876–893.
- [84] M. DE LEÓN, E. MERINO, M. SALGADO,  *$k$ -cosymplectic manifolds and Lagrangian field theories*. *J. Math. Phys.* **42** (5) (2001), 2092–2104.
- [85] M. DE LEÓN, P.R. RODRIGUES, *Methods of differential geometry in analytical mechanics*. North-Holland Mathematics Studies, 158. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.
- [86] M. DE LEÓN, P. RODRIGUES: *Generalized Classical Mechanics and Field Theory*, North-Holland Math. Studies, **112**, Amsterdam, 1985.

- [87] P. LIBERMANN, C.M. MARLE, *Symplectic geometry and analytical mechanics*. Mathematics and its Applications, 35. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
- [88] C. LÓPEZ, E. MARTÍNEZ, M.F. RAÑADA, *Dynamical Symmetries, non-Cartan Symmetries and Superintegrability of the n-Dimensional Harmonic Oscillator*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) 1241-1249.
- [89] K. MACKENZIE, *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*. London Math. Soc. Lect. Note Series 124 (Cambridge Univ. Press) (1987).
- [90] K. MACKENZIE, *Lie algebroids and Lie pseudoalgebras*. Bull. London Math. Soc. 27 (1995) 97-147.
- [91] L. MANGIAROTTI, G. SARDANASHVILY, *Gauge mechanics*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998
- [92] R. S. MARNNING, J.H. MADDOCKS, *A continuum rod model of sequencedependent dna structure*. J. Chem. Phys. 105 (1996), 5626-5646.
- [93] G. MARMO, E.J. SALETAN, A. SIMONI, B. VITALE, *Dynamical systems. A differential geometric approach to symmetry and reduction*. Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, (1985).
- [94] G. MARTIN, *Dynamical structures for k-vector fields*. Internat. J. Theoret. Phys. **27** (5) (1988), 571-585.
- [95] G. MARTIN, *A Darboux theorem for multi-symplectic manifolds*. Seat. Math. Phys. **16** (2) (1988), 133-138.
- [96] E. MARTÍNEZ, *Lagrangian mechanics on Lie algebroids*. ACTA APPL. MATH. **67** (2001), no. 3, 295-320.
- [97] E. MARTÍNEZ, *Classical Field Theory on Lie Algebroids: Multisymplectic Formalism*. arXiv:math/0411352 .
- [98] E. MARTÍNEZ E, *Geometric formulation of Mechanics on Lie algebroids*. In Proceedings of the VIII Fall Workshop on Geometry and Physics, Medina del Campo, 1999, Publicaciones de la RSME, 2 (2001), 209-222.
- [99] E. MARTÍNEZ, *Classical field theory on Lie algebroids: variational aspects*. J. Phys. A 38 (2005), no. 32, 7145-7160.

- [100] E. MARTÍNEZ, J. F. CARIÑENA, *Geometric characterization of linearisable second-order differential equations*, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **119** (1996) 373-381.
- [101] E. MARTÍNEZ, J. F. CARIÑENA, W. SARLET, *Derivations of differential forms along the tangent bundle projection*, *Diff. Geom. and its Appl.* **2** (1992) 17-43.
- [102] E. MARTÍNEZ, J. F. CARIÑENA, W. SARLET, *Derivations of differential forms along the tangent bundle projection II*, *Diff. Geom. and its Appl.* **3** (1993) 1-29.
- [103] M. MCLEAN; L. K. NORRIS, *Covariant field theory on frame bundles of fibraed manifolds*, *J. Math. Phys.* **41**(10) (2000) 6808–6823.
- [104] E. E. MERINO: *Geometría  $k$ -simpléctica y  $k$ -cosimpléctica. Aplicaciones a las teorías clásicas de campos*, Publicaciones del Dpto. de Geometría y Topología, **87**, Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 1997.
- [105] A. MORIMOTO, *Prolongations of Geometric Structures*, Math. Inst. Nagoya University, Nagoya, (1969).
- [106] A. MORIMOTO, *Liftings of some types of tensor fields and connections to tangent  $p^r$ -velocities*, *Nagoya Math. J.* **40** (1970) 13-31
- [107] F. MUNTEANU, A. M. REY, M. SALGADO. *The Günther's formalism in classical field theory: momentum map and reduction*, *J. Math. Phys.* **45**(5) (2004) 1730–1751.
- [108] M.C. MUÑOZ-LECANDA, N. ROMÁN-ROY, F.J. YÁNIZ, *Time-dependent Lagrangians invariant by a vector field*. *Seat. Math. Phys.* 57(2) (2001) 107-121.
- [109] M.C. MUÑOZ-LECANDA, M. SALGADO, S. VILARIÑO, *Nonstandard connections in  $k$ -cosymplectic field theory*. *J. Math. Phys.* **46** (2005), no. 12, 122901, 25 pp.
- [110] L.K. NORRIS, *Generalized symplectic geometry on the frame bundle of a manifold*, *Proc. Symp. Pure Math.* **54**, Part 2 (Amer. Math. Soc., Providence RI, 1993), 435-465.

- [111] L.K. NORRIS, *Symplectic geometry on  $T^*M$  derived from  $n$ -symplectic geometry on  $LM$* , *J. Geom. Phys.* **13** (1994) 51-78.
- [112] L.K. NORRIS, *Schouten-Nijenhuis Brackets*, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 2694-2709.
- [113] L. K. NORRIS,  *$n$ -symplectic algebra of observables in covariant Lagrangian field theory*, *J. Math. Phys.* **42**(10) (2001) 4827-4845.
- [114] P.J. OLVER, *Applications of Lie groups to differential equations*. Graduate Texts in Mathematics, **107**. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [115] M.F. RAÑADA, *Integrable Three Particle Systems, Hidden Symmetries and Deformations of the Calogero-Moser System*, *J. Math. Phys.* **36**(7) (1995) 3541-3558.
- [116] M.F. RAÑADA, *Superintegrable  $n = 2$  Systems, Quadratic Constants of Motion, and Potential of Drach*, *J. Math. Phys.* **38**(8) (1995) 4165-4178.
- [117] A.M. REY, N. ROMÁN-ROY, M. SALGADO, *Günther's formalism ( $k$ -symplectic formalism) in classical field theory: Skinner-Rusk approach and the evolution operator*, *J. Math. Phys.* **46**(5) (2005) 052901, 24 pp.
- [118] N. ROMÁN-ROY, A. M. REY, M. SALGADO, MODESTO, S. VILARIÑO, *On the  $k$ -symplectic,  $k$ -cosymplectic and multisymplectic formalism of Classical Field Theories*. <http://arxiv.org/abs/0705.4364>
- [119] N. ROMÁN-ROY, M. SALGADO, S. VILARIÑO, *Symmetries and conservation laws in the Günther  $k$ -symplectic formalism of field theory*. *Rev. Math. Phys.* **19** (2007), no. 10, 1117-1147.
- [120] G. SARDANASHVILY, *Gauge theory in jet manifolds*, Hadronic Press Monographs in Applied Mathematics. Hadronic Press, Inc., Palm Harbor, FL, 1993.
- [121] G. SARDANASHVILY, *Generalized Hamiltonian formalism for field theory. Constraint systems*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995.
- [122] W. SARLET, F. CANTRIJN, *Higher-order Noether symmetries and constants of the motion*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** (1981) 479-492.
- [123] D. J. SAUNDERS: *An Alternative Approach to the Cartan Form in Lagrangian Field Theories*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** (1987), 339-349.

- [124] D. J. SAUNDERS: *Jet Fields, Connections and Second-Order Differential Equations*, J. Phys. A: Math. Gen. **20** (1987), 3261-3270.
- [125] D. J. SAUNDERS: *The Geometry of Jet Bundles*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, 142, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [126] R. SKINNER, R. RUSK. *Generalized Hamiltonian dynamics. I. Formulation on  $T^*M \oplus TM$* . J. Math. Phys. **24** (11) (1983) 2589-2594.
- [127] P. SCHALLER, T. STROBL, *Poisson structure induced (topological) field theories*, Mod. Phys. Lett., A), (1994), 3129-3136.
- [128] J. SNIATYCKI, *On the geometric structure of classical field theory in Lagrangian formulation*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **68** (1970) 475-484.
- [129] J. SPILLMANN M. TESCHNER, *CORDE: Cosserat Rod Elements for the Dynamic Simulation of One-Dimensional Elastic Objects*, Eurographics/ ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation (2007), pp. 110
- [130] T. STROBL, *Gravity from Lie algebroid morphisms*. Comm. Math. Phys. 246 (2004), no. 3, 475–502.
- [131] J. SZILASI, *A setting for spray and Finsler geometry*. In: *Handbook of Finsler geometry*, Vol. 2, ed. P. L. Antonelli, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003, 1185-1426.
- [132] W.M. TULCZYJEW, *Hamiltonian systems, Lagrangian systems and the Legendre transformation*, Symposia Mathematica **16** (1974) 247–258.
- [133] W. M. TULCZYJEW, *Les sous-variétés lagrangiennes et la dynamique lagrangienne*. (French) C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283** (1976), no. 8, Av, A675–A678.
- [134] W. M. TULCZYJEW, *Les sous-variétés lagrangiennes et la dynamique hamiltonienne*. (French) C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283** (1976), no. 1, Ai, A15-A18.
- [135] J. VANKERSCHAUVER *Euler-Poincaré reduction for discrete field theories*. J. Math. Phys. 48 (2007), no. 3, 032902, 17 pp.
- [136] J. VANKERSCHAUVER *Continuous and discrete aspects of classical field theories with nonholonomic constraints*. PhD diss., Ghent University. <http://www.cds.caltech.edu/~jvk/thesis/thesis-jvk.pdf>

- [137] J. VANKERSCHAUER, F. CANTRIJN, *Discrete Lagrangian Field Theories on Lie Groupoids*. *J. Geom. Phys.* **57** (2007), no. 2, pp. 665–689.
- [138] J. VANKERSCHAUER, F. CANTRIJN, M. DE LEÓN, AND D. MARTÍN DE DIEGO, *Geometric aspects of nonholonomic field theories*, *Rep. Math. Phys.* 56 (2005), 387–411.
- [139] J. VANKERSCHAUER, D. MARTÍN DE DIEGO, *Symmetry aspects of nonholonomic field theories*, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (3) (2008), 035401.
- [140] A. WEINSTEIN, *Lagrangian mechanics and groupoids*. Mechanics day (Waterloo, ON, 1992), 207–231, *Fields Inst. Commun.*, 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1996).